Lima 26 de Agosto de 1974

Querido amigo Newton:

por fin ya terminé el primer volumen de mi <u>Filosofía de las Matemáticas</u> . Como te dije, en este primer volumen expongo la lógica de primer orden y la teoría de los conjuntos de manera elemental. Tengo vivo interés en consultarte el Cap sobre teoría de los conjuntos. Te lo voy a enviar por correo aéreo,pero antes quiero saber si estás en Sao Paulo pues como viajas tanto,de repente estás ausente y no quisiera enviártelo y que se quedará en tu oficina varuos meses. Te ruego por eso que me contestes a la brevedad posible diciéndome si estás ahora en Sao Paulo. Debido a una serie de aocontecimientos políticos que han tenido reprrcusión en laprensa mundial, "El Comercio" ha dejado ee pertenecer a mi familia.Ya algún día conversaremos sobre esto. Por ahora mi nueva dirección es la siguiente:

Francisco Miró Quesada
Universidad Peruana Cayetano Heredia
Apartado 5045
Lima-Perú

Te ruego enviarme tu respuesta y todo lo que hayas hecho úptimamente a esta dirección.

Aprovecho de esta oportunidad para hacerte algunas consultas sobre el cap de lógica. Como te dije cuando estuviste en Lima ,la exposición de este primer volumen es sumamente pedagógica. Mas, a pesar de ello,hay algunas partes que son rigurosas.Ahora bien el afán de claridad pedagógica me ha llevado a asumir ciertas teorías y ciertos conceptos que,desde el punto de vista estrictamente teórico,presentan cierta originalidad.En algunoscasos me he visto forzado hasta aelaborar conjuntos de axiomas originales y a demostrar teoremas de manera difefente.Xreo que todo está bien hechompero como estoy tan aislado, creo que es vonveniente que consulte con una persona que,como tú, es autoridad mundial en el asunto.

<u>Primer punto</u>

Este es el fundamental. Por razones pedagógicas decidí utilizar reglas para la cuanrificación diferentes de las acomstumbradas. Las usuales son las ~~xxxxxxx~~xw que se basan en las consideraciones de Frege y de Russell para explicar por qué se utilizan enunciados abiertos(fórmulas cin variables no cuantificadas) en el proceso de la deducción. Esto se debe a las reglas ~~xxxxxxxxxxxxxx~~w de especificación de lacuantificación universal y de la existencial.Así:

$$\frac{(\forall x)F(x)}{F(x)} \qquad \frac{(\exists x)F(x)}{F(x)}$$

Ahora bien, en mis clases he notado que los estudiantes de filosofía e incluso los de matemáticas que piensasn filosóficamente tienen siempre una gran dificultad para comprender esta reglas. No entienden bien por qué en un proceso deductivo ,que versa sobre proposiciones, se utilizan e nunciado abiertos que no,cuando interpretados, no son proposciones.Deducir es pasar de la verdad de las premisas a la verdad de la conclusión,pero cuando se utilizan enunciados abiertos no puee hablarse ya de verdad.Ya conocemos los famosos argumentos de Russell para justificar el uso de F(x).Pero si se analizan a fondo no son convincentes.En mi libro entro de manera detallada en estas consideraciones.

Para evitar la utilización de enuncados que no sonmproposiciones(en el lenguaje interpretado) utilizo lo que llamo la técnica de las constantes .Hasta donde llega mi información, Mates es el único que la utiliza.Pero no se da el trabajo de fundamentarla(en su libro,traducido al castellano:Lógica matemática elemental).El procedimiento es como sigue:

$$\frac{(\forall x)F(x)}{F(\beta)} \qquad \frac{(\exists x)F(x)}{F(\beta^{*})}$$

en que " " es una letras esquemática(no me gusta decir variable sintáctica o metateórica)que puede ser especificada por cualquiera de las constantes individuales utilizada en el lenguaje formal(en todo lo que decimos se sobreentiende que se trata de lenguaje y de lógica de primer orden). El asterisco en el caso de la especificación existencial lo pongo para i dicar que,si en una deducción se ha aplicado EE ,si se vuelvea aplicar hay que utilizar una letra esquemática diferente.Con esto simplificao la regla,en general expuesta de manera engorrosa,~~qwwxwwwxdxwwqwwwxwwwxwxwxwwxgxwxwwwxwwxwxwxwxwxwxwxwxw~~ de que, cuando se pasa de (x)(y)F(x,y) a F(a,b), no puede aplicarse GU(generalización universal) así:

(x)F(x,a)

que Suppes complica innecesariamente,por ejem. En fin, creo que si se utilizan letras esqu máticas en lugar de variables, se logra una mayor unidad teórica,pues entonces, en todo el proceso deductiso,cuando se interpreta el lenguaje formal,resultan proposicionesy no hay un s´olo enunciado abierto.Este procedimiento simplifica enormemente las prohiciones que hay que hacer en la aplicación de las reglas y en las sustituciones que Quine expone de manera poco pedagógica en sus Methods of Logic. Tiene,pues,una serie deventajas.

Pero por aplicareste método me sucedió una cosa interesante. Para desarrollar la lógica de primer orden, adopto los axiomas de Hunter,que son parecidos a los Church pero con ciertas modificaciones.Lo hago,porque como regla de inferencia ~~xxxx~~ el sistema de Hunter sólo tiene el <u>modus ponens</u> lo que simplifica bastante la demostración del teorema de la deducción,que por ser central desde el punto de vista te´orico y difícil de entender para el principiante en su verdadera significación, es analizado a fondo y en detalle en mi exposición. Ahora bien, para utilizar los axiomas de Hunter ~~xxxx~~ evitando la utilización deenuncuados abiertos,hay que hacer algunas modificaciones de detalle que,en aoariencia son completamente inócuas.Las hice y todo fue birn, hasta que me di cuenta ~~xxx~~ de que no podía demostrar viertos teoremas y de que me salían algunos teoremas incorrectos.Por esta razón, tuve que agregar un axioma nuevo y he llegado,así sin quererlo en ningún momento, a un conjunto de axiomas nuevo.No tiene ningún mérito,pues se inspira en Church-Hunter, pero si tiene interés pedagógico puesto que evita la utilización de enunciados abiertos. El sistema es como sigue:

A_1 $A . \Rightarrow . B \Rightarrow A$

A_2 $A . \Rightarrow . B \Rightarrow C : \Rightarrow : A \Rightarrow B . \Rightarrow . A \Rightarrow C$

A_3 $\sim A \Rightarrow \sim B . \Rightarrow . B \Rightarrow A$

A_4 $(\forall\alpha)F(\alpha) \Rightarrow F(\beta)$ en que $F(\beta)$ no tiene ninguna variable libre) además de " α "

A_5 $F(\beta) \Rightarrow (\forall\alpha)F(\alpha)$ en que hay que tomar las precauciones usuales sobre " β "(que $F(\beta)$ no sea,por ejem ni axioma, ni premisa hipotética, o que F no sea especificado por G(, β),~~xxxx~~, que no haya sido derivado por medio de EE (1)

A_6 $\sim(\forall\alpha)\sim F(\alpha) \Rightarrow F(\beta^*)$

A_7 $(\forall\alpha)[F(\alpha) \Rightarrow G(\alpha)) . \Rightarrow . (\forall\alpha)F(\alpha) \Rightarrow (\forall\alpha)G(\alpha)$

Como ves, el punto delicado está en el axioma 6.Desde el punto de vista formal me parece inobjatable,pues corresponde a la regla de especificación existencial(EE).Formalmente puede utilizarse la letra esquemática " β^* " para indicar que esta letra no puede especificarse por cualquier constante individual sino fija una que no haya ~~xxx~~ sido ya utilizada en el proceso deductivo y que,~~xxxxxxxxxxxxxxxxx~~ en caso de no haber sido utilizada debe pertencer a las constantes utilisables en relación a la derivabilidad de $\sim(\forall\alpha)\sim F(\alpha)$. No tiene importancia que,formalmente, no se sepa cuales son estas constantes,basta saber que no pueden,en principio ser todas, aunque en algunos casos

1) F nunca puede especificarse con predicados que tengan variables libres!

por ejem, en universos de un elemento,pueden ser todas.Cuando se interpreta el sistema,entonces si se ha mostrado que $\sim(\forall\alpha)\sim F(\alpha)$, es decir $(\exists\alpha)F(\alpha)$,debe haber por lo menos una constante,por ejem, a^*, que satisfaga $F(\alpha)$. Cada interpretación determina,de manera constructiva o no, el conjunto de constantes que, en relación a $(\exists\alpha)F(\alpha)$ pueden especificar la letra esquemática "β^*" .Entonces "β^*" puede especificarse por "a^*", "b^*",....etc.

No he puesto directamente:

$(\exists\alpha)F(\alpha)$

para reducir al mínimo los símbolos primitivos.Por eso, introduzco por definición el cuantificador existencial.

Lo que me interesa es saber si el sistema que propongo es completo.Su consistencia es evidente.En cuanto a su compleción, creo haberla demostrado con bastante facilidad.Pero me gustaría que me dijeras si mi creencia es correcta.La compleción en el caso del sistema que propongo es la siguiente:todas las tautologías y todas las fórmulas válidas sin variables libres son derivables en el sistema.Esto basta para que el sistema pueda ser considerado equivalente a cualquiera de los conocidos,puesto que toda fórmula válida con variables libres es derivada de una fórmula cuantificada, y de ella mediante GU se puede derivar una fórmula cuantificada.

Me interesa también saber si el axioma es o no es supernumerario.He llegado a la conclusión de que no lo es,pues, los axiomas que utilizo relacionan la variable cuantificada con la libre y vice versa cosa que no hacen las axiomas usuales.Así, en Hunter-Church A_4,se espone como sigue:

$(\forall\alpha)A \Longrightarrow A$ (en que A no tiene "α" como variable libre)

Esta propiedad,de que "α" no sea libre en A permite mostrar, utilizando el teorema de la deducción, que la regla EE puede utilizarse en el sistema como regla derivada.Más para hacerlo en el sistema que propongo no puede utilizarse un axioma como

$(\forall\alpha)A \Longrightarrow A$

pues A puede especificarse por enunciados con variables libres.

Te agradeceré muchísimo,que a pesar de lo ocupado que estás, me contestes a estas preguntas.La que más interesa es,naturalmente, la de la compleción.Pero si no te aburre demasiado me gustaría que también me dijeras si A_4 es o no supernumerario(como lo sería en el sistema de Hunter).

Segundo punto

Este es un tema sobre el que no hablé en este primer tomo,pero que tengo que abordar a fondo en el tercero,pues concierne al aspecto propiamente filosófico de la investigación.Se trata del concepto de validez y de consecuencia lógica en la lógica de segundo orden.Es sabido que en la lógica de segundo orden hay dos clases de ~~modelos~~ interpretaciones:principales y secundarias . Las principales son aquellas en las que se consideran la totalidad de los atributos del universo ~~del modelo~~,y además, se incluye el predicado de igualdad en su sentido intuitivo,es decir como relación de igualdad entre dos objetos del universo.Las ~~modelos~~ interpretaciones secundarias son aquellas que no contienen la totalidad de los atributos de los individuos del universo ~~del modelo~~.

De acuerdo con esta diferencia hay dos tipos de validez: validez principal y validez secundaria o débil. Una fórmula de segundo orden es válida cuando ~~para~~ toda interpretación ~~en relación a modelos principales~~,la trasforma en proposición verdadera.En cambio es secundariamente válida,cuando sea cual sea ~~el~~ la ~~modelo utilizado en~~ la interpetación, resulta verdadera.

Hoy día se da mucha importancia a los modelos principales. Supongo que ello se debe a que imponen ciertas condiciones de categoricidad, como es el caso en la Aritmética de Peano.

Pero hay algo que no comprendo bien. Y es que, debido a esta categoricidad, se considere que la proposoción indecidible de Gödel es consecuencia lógica de los axiomas de Peano. Así Kleene, dice:

"Así, cuando tenemos axiomas no elementales (de segundo orden), no todas las fórmulas que son verdaderas bajo todas las interpretaciones que satisfacen los axiomas son necesariamente derivables" (Kleene. Introduction to Metamathematics. pág 432.

Si hay fórmulas, como la de Gödel que son verdaderas para todas las interpretaciones que satisfacen los axiomas, ello quiere decir que son consecuencia lógica de los mismos (por definición de conseduencia lógica). Pero, evidentemente no se trata para todas las interpretaciones referentes a estructuras cuyos universos poseen todos los atributos de sus miembros.

Es evidente que Kleene, aquí, considera que cuando una fórmula es verdadera para todas las interpretaciones principales, puede considerarse como consecuencia lógica de los axiomas. Pero a mi no me parece que esto pueda sostenerse, porque si no es verdadera para <u>todas</u> las interpretaciones, entonces no puede hablarse de consecuencia lógica auténtica. Me parece que hay aquí un problema interesante que vale la pena investigar a fondo. Hay dos puntos centrales. 1) Hasta que punto puede considerarse que una fórmula es consecuencia lógica de otras cuando es verdadera, no para todas las interpretaciones posibles, sino para un conjunto amplio de interpretaciones. En este caso podría hablarse de <u>consecuencia lógica relativa</u> o <u>acotada</u> (bounded); 2) El hecho de ser consecuencia lógica relativa a todas las interpretaciones principales (lógica de segundo orden) tiene especial peso. Me parece que la única razón es que este tipo de interpretación (principal) impone el isomorfismo de los modelos. Pero esto no da <u>derecho</u> para considerar que la fórmula es dedicible <u>sin más</u> de los axiomas; 3) Es indudable que en esto influye la estructura lingüística de la lógica de segundo orden. Esto permite estudiar muy de cerca la manera como la estructura de un lenguaje formal <u>impone</u> determinadas posibilidades deductivas y cierto tipo de relación con los conjuntos de objetos que permite estudiar.

Bueno, querido Newton, me despido. No quiero quitarte más tiempo pero si quiero hacerte estos pedidos de esclarecimiento, aprovechando de tu gentil ofrecimiento en el Perú de ayudarme en estos menesteres. Aquí no hay nadie con quien pueda consultar estas cosas. Esperando tu pronta respuesta, y teniendo la seguridad de que nos encontraremos pronto, me despido con un cordial abrazo

Francisco Miró Quesada