UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
Dipartimento di Filosofia "A. Aliotta,,

Napoli 5/7/86

Carissimo amico,

ti mando finalmente "on paraconsistent topologic logic",quel lavoro di cui ti parlai a Torino e di cui già ti sottoposi alcune parti in quella occasione.
E' un tentativo di estendere il tuo Π in chiave topologica con un abbozzo di semantica "del negativo" (p.5;p.I3-I4),come io la chiamo, ma potrebbe trovare altre espressioni.
Essa ingloba anche la semantica positiva di Π ed é presente a p.4 e p.I3 anche una semantica positiva.
Quella del "negativo" valuta gli operatori e le formule partendo dal concetto che il valore designato deve essere $\neq 0$ (diverso da 0, cioé diverso dalla falsità, p.5, p.I3 -I4).
Mi pare che questo stratagemma semplice e significante possa risolvere quelle difficoltà tecniche e semantiche di tipo tarskiano o kripkeano allorché ci troviamo in sistemi paraconsistenti modali,temporali deontici.
Non so se la via é giusta, vedi tu il tutto.
Questo lavoro si innesta sui tuoi lavori specialmente "Paraconsistency, paracompleteness and valutations";il mio é stato solo un tentativo di iniziare quella collaborazione tra noi anche a livello specifico e tecnico.
Ci sono anche dei concetti abbozzati del tipo "verità di confine" che meriterebbero in un futuro lavoro maggior approfondimento.
Fammi sapere il tuo parere e se ci sono tagli, modifiche ed aggiunte fai pure liberamente, sempre se ne vale la pena.
Seguendo il tuo suggerimento sto sviluppando in chiave deontica il tuo Π al quale oltre la semantica positiva si potrebbe applicare la stessa semantica del negativo, cosa ne pensi? Se va bene per $\Pi\tau$ andrà bene per ΠD.
Appena terminato quest'ultimo lavoro te lo invierò.
Avevo pensato di estendere topologicamente e deonticamente il tuo DL, cosa ne pensi a riguardo?

80133 Napoli - Via Porta di Massa, 1

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
Dipartimento di Filosofia "A. Aliotta,,

./.

Ho mandato il mio libro a quei nominativi che mi hai dato a Torino, nonché al prof.Abe ho inviato le 5 copie chiestomi.

Spero avrai ricevuto la mia lettera in cui ti annunciavo la nascita di Francesco!

Tu cosa fai in questo periodo? Come vanno le tue cose?

Spero benissimo! A presto dunque

Un abbraccio affettuosissimo
tuo fratello
Nicola

80133 Napoli - Via Porta di Massa, 1

ON PARACONSISTENT TOPOLOGIC LOGIC

Introduzione

Dal 1954 il prof. N.C.A. da Costa ha lavorato su un nuovo tipo di logica che ci ha permesso di studiare teorie e sistemi formali contenenti inconsistenze, del tipo $\alpha \wedge \neg\alpha$, senza che la logica presentata si banalizzasse. Una caratteristica importante di tale logica é appunto la diversificazione dei termini e dei concetti di banalità - inconsistenza.
Gli studi di da Costa hanno ormai dimostrato la possibilità rigorosa di costruire una logica contenente inconsistenze ma non banale (da Costa 74). Per un approccio storico di tale sviluppo vedere anche Arruda (80) e Grana(83).
In questa sede noi vogliamo focalizzare alcuni aspetti tecnici e teoretici della logica paraconsistente, nonché chiarire alcune implicazioni filosofiche.
Innansitutto confortati dagli sviluppi della logica paraconsistente che dagli anni 80 in poi ci ha dato, proponiamo una nuova interpretazione di essa a livello filosofico.
Per noi la logica paraconsistente non é una nuova logica con le sue dimensioni linguistiche sintattiche, semantiche e pragmatiche da affiancarsi alla logica standard o alle logiche non standard in una collocazione intermedia e compossibile ad essi. La logica paraconsistente più che una autonoma logica si sta rivelando un trattamento estensivo ed intensivo della logica standard e delle logiche non standard.a tutti i livelli non solo in senso deduttivo, ma anche induttivo, probabilistico, statistico, categoriale ecc. Solo in questa nuova prospettiva possiamo cogliere la vitalità e la profondità teoretica della logica paraconsistente e chiarire meglio le implicazioni filosofiche che ne derivano.
A conforto di quanto detto basta analizzare la mappa attuale della logica paraconsistente sia in senso standard, che polivalente, intuizionista, fuzzy, modale ,deontico ecc.

Noi proponiamo una ulteriore estensione della logica paraconsistente in sede topologica o posizionale.

A nostro avviso ci pare interessante sia da un punto di vista tecnico sia da un punto di vista filosofico un simile approccio.

Difatti lo~~s~~ scopo filosofico é di riuscire a catturare tesi dialettiche contenenti concetti di "divenire" "sintesi degli opposti" "misura" passaggio "dalla quantità alla qualità" "reale" "vaghezza" "produttivismo dinamico"ecc.

A livello tecnico abbiamo uno strumento formalizzato di più incisiva penetrazione nell'analisi dei linguaggi artificiali e di quello ordinario.

Precisiamo però che non vogliamo privileggiare nessuno dei due aspetti linguistici (ordinario artificiale) in questa sede, rimandando ad un approfondimento critico del problema ad un nostro lavoro in corso di pubblicazione.

La motivazione intuitiva del trattamento paraconsistente della logica topologica é quella di cogliere nella posizionalità, situazionalità, temporalità il movimento, il trapasso dinamico, la processualità che in una situazione standard viene elusa perché scissa in atomi di tempo e di posizioni cristallizzati nella loro fissità astratta.

Su un percorso diverso sono stati elaborati da von Wright (69) e Dalla Chiara Scabia (73) sistemi che possono in qualche modo cogliere il divenire e la contraddizione di esso. Il nostro percorso é differente,ma non esclusivo ed alternativo rispetto quei rigorosi ed interessanti tentativi.

Diamo per acquisito il sistema $\pi\tau$ di da Costa (82 - 84) e costruiamo su di esso il nostro $\Pi\tau$ richiamando solo alcune nozioni per maggior chiarezza.

Una teoria é chiamata inconsistente se fra i suoi teoremi ce ne sono almeno due, uno dei quali é la negazione dell'altro, quando non vi é questo caso la teoria é consistente. Noi chiamiamo la teoria banale quando tutte le formule del suo linguaggio sono anche teoremi delle teorie stesse. Se c'é almeno una formula del suo linguaggio che non é un teorema allora la teoria si dice non banale.

Assumiamo che una logica é paraconsistente se essa può essere la logica sottostante delle teorie contenenti teorie contradditorie che sono entrambe vere tali teorie noi le chiamiamo paraconsistenti.
Una logica é detta paracompleta se essa può funzionare come logica sottostante di teorie in cui ci sono formule tali che le loro negazioni sono simultaneamente false.E' detta anche topologica se consideriamo l'esprimibilità di un luogo, di un tempo e/o di mondi possibili non in senso statico bensì dinamico. Questo ultimo aspetto é connesso al concetto di gradualità che vedremo in seguito in un ambito semantico trivalente.

Semantica di valutazione

Un calcolo logico G é una coppia ordinata $\langle \Delta , R \rangle$ in cui Δ é un insieme di formule di un linguaggio dato L, ed R é una collezione di regole di inferenza. Δ é chiamato l'insieme degli assiomi di G.
In questo scritto L sarà un linguaggio proposizionale. Assumiamo che L contiene variabili proposizionali, parentesi, connettivi ed operatori, usualmente il linguaggio contiene connettivi per l'implicazione ($\rightarrow$) congiunzione ($\wedge$) disgiunzione (V) negazione ($\neg$) ed operatore (T).
Il concetto di formula é quello usuale. Le lettere minuscole romane stanno per formule, le lettere maiuscole greche stanno per insiemi di formule, le lettere greche minuscole stanno per le posizioni spazio-temporali, le lettere minuscole greche con asterisco stanno per insiemi di posizioni spazio-temporali. Diciamo solo che una regola riferisce una nuova formula (la conclusione) a un insieme di formule (le premesse). Per una regola data il numero di premesse é sempre finito e fissato.
In un calcolo G una formula a é una conseguenza sintattica di un insieme Γ di formule in senso usuale e scriveremo $\Gamma \vdash$ a oppure semplicemente $\vdash$
Def.I sia G = $\langle \Delta , R \rangle$ un calcolo e W una funzione dell'insieme di formule del linguaggio L di G in $\{ 0, I \}$ diciamo che W é una W-valutazione a due valori associata con G se abbiamo:

I) Se a $\in \Delta$ allora W (a) $\neq$ 0

2) Se tutte le premesse di una applicazione di una regola appartenendo ad R non assumono mai valore 0 sotto W, allora la conclusione corrispondente non assumerà mai valore 0.

3) Esiste almeno una formula a così che W(a) = 0

se V é l'insieme delle W-valutazioni di un calcolo G, W $\in$ V, e Γ é un insieme di formule del linguaggio di G. Diciamo che W soddisfa Γ se per ogni a $\in \Gamma$, W(a) $\neq$ 0

Abbiamo le seguenti proprietà:

i) se $\Gamma \vdash$ a, allora, per ogni W $\in$ V, se W soddisfa Γ, allora W(a) $\neq$ 0

ii) G é banale se e solo se V = $\emptyset$ (G é detto essere banale se per ogni formula a del suo linguaggio, abbiamo che $\vdash$ a)

Sia $\Sigma \cup \{a\}$ un insieme di formule di un calcolo non banale G, Σ é chiamato a-saturato se $\Sigma \nvdash a$ e per ogni $b \notin \Sigma$, $\Sigma \cup \{b\} \vdash a$.

iii) Se Σ é a-saturato allora $\Sigma \vdash$ b se e solo se b $\in \Sigma$

iv) Se $\Gamma \nvdash$ a, allora esiste un insieme a-saturato Σ così che $\Gamma \subset \Sigma$.

v) La funzione caratteristica di un insieme a-saturato é una W-valutazione.

Una W-valutazione che é la funzione caratteristica di un insieme a-saturato é chiamata una valutazione.

Diciamo che a é una conseguenza semantica di Γ per ogni valutazione W̲ che soddisfa Γ, W(a) $\neq$ 0 e scriveremo $\Gamma \Vdash a$ opp $\Vdash a$

Teorema I) $\Gamma \vdash a$ se e solo se $\Gamma \Vdash a$

prova da i-v

Si dice modello di Γ una valutazione W̲ così che W̲(a) $\neq$ 0 per ogni a appartenente ad una collezione Γ di formule.

Una teoria basata su un calcolo G é un insieme F di formule di L, il linguaggio di G, tale che se F $\vdash$ a, allora a $\in$ F.

Dove F = $\{$ a : K $\vdash$ a $\}$, K é chiamato un insieme di assiomi per F qualsiasi valutazione W̲ di G é modello di F se W̲(a) $\neq$ 0 per ogni a $\in$ F.

I teoremi o tesi di F sono le formule che appartengono a F.

G é paraconsistente se e solo se ci sono teorie basate su G avendo per modelli W per cui $\underline{W}(a) = \underline{W}(\neg\ a) = I$ per qualche $a \in L$ - (oppure che é lo stesso in una semantica bivalente $\underline{W}(a) = \underline{W}(\neg a) \neq 0$ per qualche $a \in L$).

Similmente G é paracompleto se per qualche teoria F, basata su G, F ha un modello $\underline{W}$ tale che, per qualche formula a, $\underline{W}(a) = \underline{W}(\neg a) = 0$ e viceversa.

G é detta topologica se e solo se $T\alpha\,(a) \neq a$

e se $\not\vdash a \rightarrow T\alpha(a)$

$\not\Vdash a \rightarrow T\alpha(a)$

$\vdash T\alpha(a) \rightarrow a$

$\Vdash T\alpha(a) \rightarrow a$

Il sistema Πt

Il linguaggio di Πt contiene dei segni primitivi di Π più $T\alpha$ ove $T\alpha(a)$ va letto come la proposizione a é realizzata nella posizione α -

Qui α può essere inteso come un dominio di posizioni, di coordinate cartesiane, posizioni spaziali, oppure numeri di posti a sedere in una sala di conferenze o di teatro, oppure le posizioni possono essere temporali con α che varia sui numeri interi (giorni ed anni) o sui numeri reali per una datazione più precisa.

Se gli α rappresentano tempi le a devono essere proposizioni temporalmente indefinite del tipo"é piovuto ieri" se gli α rappresentano luoghi, le a devono essere proposizioni spazialmente indefinite del tipo "sta piovendo qui".

Inoltre introdurremo due postulati su Π tale che

$\Pi t_1 \qquad T\alpha(\neg a) \leftrightarrow \neg\, T\alpha(a)$

$\Pi t_2 \qquad T\alpha\,(a \wedge b) \leftrightarrow (T\alpha(a) \wedge T\alpha(b))$

πt_1 asserisce che non a é vera in qualche posizione, allora non é vera che a é vera in quella posizione e viceversa

πt_2 significa che se una congiunzione é vera in qualche posizione allora ciascuno dei congiunti é vero in quella posizione e viceversa.

Il T operatore si distribuisce su tutti i connettivi di π.

Aggiungiamo anche la RT se $\vdash$ a allora $\vdash T_\alpha(a)$

Per la distribuitività di T da RT possiamo interdedurre la regola di sostituzione se $\vdash a \leftrightarrow b$ e $\vdash T_\alpha(a)$ allora $T_\alpha(b)$-

Riepiloghiamo i postulati del nostro sistema πt tenendo presente la possibilità di distribuzione del T operatore sui connettivi del sistema π base di da Costa e naturalmente avremo in πt i seguenti postulati:

$$T\alpha(a^{\varphi}) =_{Def.} \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \wedge (T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))$$

1) $T\alpha(\neg a) \leftrightarrow \neg T\alpha(a)$

2) $T\alpha(a \wedge b) \leftrightarrow (T\alpha(a) \wedge T\alpha(b))$

3) $a \,/\, T\alpha(a)$

4) $T\alpha(a) \to (T\alpha(b) \to T\alpha(a))$

5) $(T\alpha(a) \to T\alpha(b)) \to ((T\alpha(a) \to (T\alpha(b) \to T\alpha(c))) \to (T\alpha(a) \to T\alpha(c)))$

6) $T\alpha(a),\ T\alpha(a) \to T\alpha(b) \,/\, T\alpha(b)$

7) $(T\alpha(a) \wedge T\alpha(b)) \to T\alpha(a)$

8) $(T\alpha(a) \wedge T\alpha(b)) \to T\alpha(b)$

9) $T\alpha(a) \to (T\alpha(b) \to (T\alpha(a) \wedge T\alpha(b)))$

10) $T\alpha(a) \to (T\alpha(a) \vee T\alpha(b))$

11) $T\alpha(b) \to (T\alpha(a) \vee T\alpha(b))$

12) $(T\alpha(a) \to T\alpha(c)) \to ((T\alpha(b) \to T\alpha(c)) \to ((T\alpha(a) \vee T\alpha(b)) \to T\alpha(c)))$

13) $T\alpha(a^{\varphi}) \vee (T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \vee \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))$

14) $\neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)) \to \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))$

15) $\neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \to ((T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \to T\alpha(b))$

16) $\neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)) \to ((T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)) \to T\alpha(b))$

17) $(T\alpha(a^{\varphi}) \wedge T\alpha(b^{\varphi})) \to ((T\alpha(a) \wedge T\alpha(b))^{\varphi} \wedge (T\alpha(a) \vee T\alpha(b))^{\varphi} \wedge$

$\wedge (T\alpha(a) \to T\alpha(b))^{\varphi} \wedge (\neg T\alpha(a))^{\varphi})$

Teorema 2 — I seguenti schemi non sono validi in K_T

1) $\neg\neg T\alpha(a) \to T\alpha(a)$

2) $T\alpha(a) \to \neg\neg T\alpha(a)$

3) $\neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))$

4) $(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \to T\alpha(b)$

5) $T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)$

6) $(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)) \to T\alpha(b)$

7) $(T\alpha(a) \to \neg T\alpha(a)) \to \neg T\alpha(a)$

8) $\neg T\alpha(a) \vee \neg\neg T\alpha(a)$

9) $(T\alpha(a) \to T\alpha(b)) \to ((T\alpha(a) \to \neg T\alpha(b)) \to \neg T\alpha(a))$

10) $(\neg T\alpha(b) \to \neg T\alpha(a)) \to (T\alpha(a) \to T\alpha(b))$

11) $(T\alpha(a) \to T\alpha(b)) \to (\neg T\alpha(b) \to \neg T\alpha(a))$

12) $\neg T\alpha(a) \to (T\alpha(a) \to T\alpha(b))$

13) $\neg(T\alpha(a) \to T\alpha(a)) \to T\alpha(b)$

14) $\neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(b)) \to (\neg T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(b))$

15) $\neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(b)) \to (\neg T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(b))$

16) $(\neg T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(b)) \to \neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(b))$

17) $(\neg T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(b)) \to \neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(b))$

18) $(T\alpha(a) \to T\alpha(b)) \to \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(b))$

19) $\neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(b)) \to (T\alpha(a) \to T\alpha(b))$

20) $\neg\neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))$

TEOREMA 3 – I seguenti schemi non sono validi in $\mathfrak{A}_t$

21) $T\alpha(\neg\neg a) \to T\alpha(a)$

22) $T\alpha(a) \to T\alpha(\neg\neg a)$

23) $T\alpha\neg(a \wedge \neg a)$

24) $\neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a))$

25) $(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a)) \to T\alpha(b)$

26) $T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a)$

27) $(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a)) \to T\alpha(b)$

28) $(T\alpha(a) \to T\alpha(\neg a)) \to T\alpha(\neg a)$

29) $T\alpha(\neg a) \vee T\alpha(\neg\neg a)$

30) $(T\alpha(a) \to T\alpha(b)) \to ((T\alpha(a) \to T\alpha(\neg b)) \to T\alpha(\neg a))$

31) $(T\alpha(\neg b) \to T\alpha(\neg a)) \to (T\alpha(a) \to T\alpha(b))$

32) $(T\alpha(a) \to T\alpha(b)) \to (T\alpha(\neg b) \to T\alpha(\neg a))$

33) $T\alpha(\neg a) \to (T\alpha(a) \to T\alpha(b))$

34) $T\alpha\neg(a \to a) \to T\alpha(b)$

35) $T\alpha\neg(a \vee b) \to (T\alpha(\neg a) \wedge T\alpha(\neg b))$

36) $T\alpha\neg(a \wedge b) \to (T\alpha(\neg a) \vee T\alpha(\neg b))$

37) $T\alpha(\neg a \vee \neg b) \to T\alpha\neg(a \wedge b)$

38) $T\alpha(\neg a \wedge \neg b) \to T\alpha\neg(a \vee b)$

39) $(T\alpha(a) \to T\alpha(b)) \to T\alpha\neg(a \wedge \neg b)$

40) $T\alpha\neg(a \wedge \neg b) \to T\alpha(a \to b)$

41) $T\alpha\neg(a \wedge \neg b) \to (T\alpha(a) \to T\alpha(b))$

42) $T\alpha\neg\neg(a \vee \neg a)$

43) $\neg\neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))$

TEOREMA 4 - I seguenti schemi sono provabili in $\mathcal{K}t$

$T_1)$ $\neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)) \to (T\alpha(a) \to T\alpha(b))$

$T_2)$ $(\neg T\alpha(a) \wedge \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))) \to (T\alpha(a) \to T\alpha(b))$

$T_3)$ $T\alpha(a) \vee (T\alpha(a) \to T\alpha(b))$

$T_4)$ $(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \vee \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))$

$T_5)$ $((T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \wedge \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))) \to T\alpha(b)$

$T_6)$ $\neg((T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \wedge \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)))$

$T_7)$ $(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)) \vee \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))$

$T_8)$ $\neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)) \to ((T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \to T\alpha(b))$

$T_9)$ $T\alpha(a) \vee \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))$

$T_{10})$ $\neg T\alpha(a) \vee \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))$

$T_{11})$ $\neg((T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)) \wedge \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)))$

$T_{12})$ $(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))^{\varphi}$

$T_{13})$ $(\neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)))^{\varphi}$

$T_{14})$ $(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))^{\varphi}$

$T_{15})$ $(T\alpha(a))^{\varphi\varphi}$

$T_{16})$ $(T\alpha(a) \to T\alpha(b)) \to ((T\alpha(a) \to (T\alpha(b) \to \neg(T\alpha(b) \vee \neg T\alpha(b)))) \to$
$\to (T\alpha(a) \to \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))))$

$T_{17})$ $((T\alpha(a) \to \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))) \to \neg((T\alpha(a) \to \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))) \vee$
$\vee \neg(T\alpha(a) \to \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))))) \to T\alpha(a)$

$T_{18})$ $(\neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \wedge (T\alpha(b) \vee \neg T\alpha(b))) \to ((\neg T\alpha(b) \to \neg T\alpha(a)) \to$
$\to (T\alpha(a) \to T\alpha(b)))$

$T_{19})$ $(\neg(T\alpha(b) \wedge \neg T\alpha(b)) \wedge (T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))) \to ((T\alpha(a) \to T\alpha(b)) \to$
$\to (\neg T\alpha(b) \to \neg T\alpha(a)))$

$T_{20})$ $(T\alpha(a))^{\varphi} \to (T\alpha(a) \to \neg\neg T\alpha(a))$

$T_{21})$ $(T\alpha(a))^{\varphi} \to (\neg\neg T\alpha(a) \to T\alpha(a))$

TEOREMA 4 - I seguenti schemi sono provabili in $\mathcal{T}t$

$T_1)$ $\neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)) \to (T\alpha(a) \to T\alpha(b))$

$T_2)$ $(\neg T\alpha(a) \wedge \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))) \to (T\alpha(a) \to T\alpha(b))$

$T_3)$ $T\alpha(a) \vee (T\alpha(a) \to T\alpha(b))$

$T_4)$ $(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \vee \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))$

$T_5)$ $((T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \wedge \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))) \to T\alpha(b)$

$T_6)$ $\neg((T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \wedge \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)))$

$T_7)$ $(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)) \vee \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))$

$T_8)$ $\neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)) \to ((T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \to T\alpha(b))$

$T_9)$ $T\alpha(a) \vee \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))$

$T_{10})$ $\neg T\alpha(a) \vee \neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))$

$T_{11})$ $\neg((T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)) \wedge \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a)))$

$T_{12})$ $(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))^{\varphi}$

$T_{13})$ $(\neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)))^{\varphi}$

$T_{14})$ $(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))^{\varphi}$

$T_{15})$ $(T\alpha(a))^{\varphi\varphi}$

$T_{16})$ $(T\alpha(a) \to T\alpha(b)) \to ((T\alpha(a) \to (T\alpha(b) \to \neg(T\alpha(b) \vee \neg T\alpha(b)))) \to$
$\to (T\alpha(a) \to \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))))$

$T_{17})$ $((T\alpha(a) \to \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))) \to \neg((T\alpha(a) \to \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))) \vee$
$\vee \neg(T\alpha(a) \to \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))))) \to T\alpha(a)$

$T_{18})$ $(\neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a)) \wedge (T\alpha(b) \vee \neg T\alpha(b))) \to ((\neg T\alpha(b) \to \neg T\alpha(a)) \to$
$\to (T\alpha(a) \to T\alpha(b)))$

$T_{19})$ $(\neg(T\alpha(b) \wedge \neg T\alpha(b)) \wedge (T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))) \to ((T\alpha(a) \to T\alpha(b)) \to$
$\to (\neg T\alpha(b) \to \neg T\alpha(a)))$

$T_{20})$ $(T\alpha(a))^{\varphi} \to (T\alpha(a) \to \neg\neg T\alpha(a))$

$T_{21})$ $(T\alpha(a))^{\varphi} \to (\neg\neg T\alpha(a) \to T\alpha(a))$

TEOREMA 5 I seguenti schemi sono provabili in $\mathfrak{T}$

T_{22} $\neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a)) \rightarrow (T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b))$

T_{23} $T\alpha\neg(a \vee \neg a) \rightarrow (T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b))$

T_{24} $T\alpha\neg(a \vee \neg a) \rightarrow T\alpha(a \rightarrow b)$

T_{25} $(T\alpha(\neg a) \wedge \neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a))) \rightarrow (T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b))$

T_{26} $(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a)) \vee \neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a))$

T_{27} $((T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a)) \wedge \neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a))) \rightarrow T\alpha(b)$

T_{28} $\neg((T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a)) \wedge \neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a)))$

T_{29} $(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a)) \vee \neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))$

T_{30} $\neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a)) \rightarrow ((T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a)) \rightarrow T\alpha(b))$

T_{31} $T\alpha(a) \vee \neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a))$

T_{32} $T\alpha(\neg a) \vee \neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a))$

T_{33} $\neg((T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a)) \wedge \neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a)))$

T_{34} $(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a))^{\varphi}$

T_{35} $(\neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a)))^{\varphi}$

T_{36} $(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))^{\varphi}$

T_{37} $(T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b)) \rightarrow ((T\alpha(a) \rightarrow (T\alpha(b) \rightarrow \neg(T\alpha(b) \vee T\alpha(\neg b)))) \rightarrow$

$\rightarrow (T\alpha(a) \rightarrow \neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))))$

T_{38} $((T\alpha(a) \rightarrow \neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))) \rightarrow \neg((T\alpha(a) \rightarrow \neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))) \vee$

$\vee \neg(T\alpha(a) \rightarrow \neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))))) \rightarrow T\alpha(a)$

T_{39} $(\neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a)) \wedge (T\alpha(b) \vee T\alpha(\neg b))) \rightarrow ((T\alpha(\neg b) \rightarrow T\alpha(\neg a)) \rightarrow$

$\rightarrow (T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b)))$

T_{40} $(\neg(T\alpha(b) \wedge T\alpha(\neg b)) \wedge (T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))) \rightarrow ((T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b)) \rightarrow$

$\rightarrow (T\alpha(\neg b) \rightarrow T\alpha(\neg a)))$

T_{41} $(T\alpha(a))^{\varphi} \rightarrow (T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(\neg\neg a))$

T_{42} $(T\alpha(a))^{\varphi} \rightarrow (T\alpha(\neg\neg a) \rightarrow T\alpha(a))$

Def. $\sim T\alpha(a) \underset{\text{def.}}{=} T\alpha(a) \rightarrow \neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))$

opp. per il postulato I)

$\underset{\text{def.}}{=} T\alpha(a) \rightarrow \neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))$

("$\sim$" é la negazione forte e/o classica di $\mathcal{H}\psi$)

Teorema 6. "$\sim$" ha le proprietà della negazione classica.

Prova. Infatti abbiamo in $\mathcal{H}\tau$

$\vdash (T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b)) \rightarrow (\sim T\alpha(b) \rightarrow \sim T\alpha(a))$ (da TI6)

e $\vdash \sim\sim T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(a)$ (da TI7)

Corollario.

Se ammettiamo il postulato Ibis per la negazione forte "$\sim$"

$$T\alpha(\sim a) \leftrightarrow \sim T\alpha(a)$$

avremo:

$$\vdash (T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b)) \rightarrow (T\alpha(\sim b) \rightarrow T\alpha(\sim a))$$

$$\vdash T\alpha(\sim\sim a) \rightarrow T\alpha(a)$$

Dunque dai postulati 2-I2 più Ibis con gli schemi

$$(T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b)) \rightarrow (\sim T\alpha(b) \rightarrow \sim T\alpha(a))$$

$$\sim\sim T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(a)$$

$$(T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b)) \rightarrow (T\alpha(\sim b) \rightarrow T\alpha(\sim a))$$

$$T\alpha(\sim\sim a) \rightarrow T\alpha(a)$$

costituiscono una base assiomatica per il calcolo classico topologico ove "$\rightarrow$", "$\wedge$", "v", "$\sim$", " T " sono operatori primitivi.

$\mathcal{H}\psi$ contiene ovviamente così il calcolo proposizionale classico topologico.

LA SEMANTICA DI VALUTAZIONE E METODO DI DECISIONE PER π_t

Sia W_{π_t} l'insieme delle funzioni di formule di π_t in $\{0,I\}$ così che per ogni $\underline{W} \in W_{\pi_t}$ abbiamo:

I) $\underline{W}(T\alpha(a) \wedge T\alpha(b)) = I$ se e solo se $\underline{W}(T\alpha(a)) = \underline{W}(T\alpha(b)) = I$

2) $\underline{W}(T\alpha(a) \vee T\alpha(b)) = I$ se e solo se $\underline{W}(T\alpha(a)) = I$ opp. $\underline{W}(T\alpha(b)) = I$

3) $\underline{W}(T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b)) = I$ se e solo se $\underline{W}(T\alpha(a)) = 0$ opp. $\underline{W}(T\alpha(b)) = I$

4) Se $\underline{W}(T\alpha(\neg\neg a)) = \underline{W}(T\alpha(\neg a))$, allora $\underline{W}(T\alpha(\neg a)) = \underline{W}(T\alpha(a))$

5) Se $\underline{W}(\neg\neg T\alpha(a)) = \underline{W}(\neg T\alpha(a))$, allora $\underline{W}(\neg T\alpha(a)) = \underline{W}(T\alpha(a))$

6) Se $\underline{W}(T\alpha(a) + T\alpha(b)) = \underline{W}(\neg(T\alpha(a) + T\alpha(b)))$, allora $\underline{W}(T\alpha(a)) = \underline{W}(\neg T\alpha(a)) = \underline{W}(T\alpha(\neg a))$ e $\underline{W}(T\alpha(b)) = \underline{W}(\neg T\alpha(b)) = \underline{W}(T\alpha(\neg b))$, per $+ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, T,\}$

7) $\underline{W}(\neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))) \neq \underline{W}(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))$

8) $\underline{W}(\neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a))) \neq \underline{W}(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a))$

9) $\underline{W}(\neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))) \neq \underline{W}(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))$

IO) $\underline{W}(\neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))) \neq \underline{W}(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))$

Teorema 7. L'insieme W_{π_t} é l'insieme delle valutazioni associate con π_t

Prova. E' facile dimostrare che $\underline{W} \in \underline{W}_{\pi_t}$ se e solo se esiste un insieme di formule $\Sigma \cup \{a\}$ così che Σ é a-saturato e $\underline{W}$ é la sua funzione caratteristica.

Seguendo la semantica individuata precedentemente, invece di ricorrere a delle valutazioni positive, come esposto sopra, possiamo individuare valutazioni che denomineremo della "diversità" le quali non solo potrebbero catturare le classiche $\{I,0\}$, ma addirittura quelle a tre valori $\{I,2,0\}$ o a più valori qualora lo richiederebbe il contesto, per esempio una semantica che voglia catturare la vaghezza in un ambito ~~tri~~ polivalente.

Definiamo questa semantica della "diversità" o del negativo e confrontandola con la precedente bivalente classica noteremo che sono esattamente identiche in un ambito bivalente (ove il valore 0 é la falsità ed il valore $\neq 0$ equivale ad I) ovviamente in un ambito per esempio trivalente il $\neq 0$ equivarrebbe agli altri due valori positivi di volta in volta designati.

Sia $W_{\pi\tau}$ l'insieme delle funzioni dell'insieme di formule di $\pi\tau$ in $\{0, \neq 0\}$ così che per ogni $\underline{W} \in W_{\pi\tau}$ abbiamo:

I) $\underline{W}(T\alpha(a) \wedge T\alpha(b)) \neq 0$ se e solo se $\underline{W}(T\alpha(a)) = \underline{W}(T\alpha(b)) \neq 0$

2) $\underline{W}(T\alpha(a) \vee T\alpha(b)) \neq 0$ se e solo se $\underline{W}(T\alpha(a)) \neq 0$ opp. $\underline{W}(T\alpha(b)) \neq 0$

3) $\underline{W}(T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b)) \neq 0$ se e solo se $\underline{W}(T\alpha(a)) = 0$ opp. $\underline{W}(T\alpha(b)) \neq 0$

4) Se $\underline{W}(T\alpha(\neg\neg a)) = \underline{W}(T\alpha(\neg a))$, allora $\underline{W}(T\alpha(\neg a)) = \underline{W}(T\alpha(a))$

5) Se $\underline{W}(\neg\neg T\alpha(a)) = \underline{W}(\neg T\alpha(a))$, allora $\underline{W}(\neg T\alpha(a)) = \underline{W}(T\alpha(a))$

6) Se $\underline{W}(T\alpha(a) + T\alpha(b)) = \underline{W}(\neg(T\alpha(a) + T\alpha(b)))$, allora $\underline{W}(T\alpha(a)) = \underline{W}(\neg T\alpha(a)) =$
$= \underline{W}(T\alpha(\neg a))$ e $\underline{W}(T\alpha(b)) = \underline{W}(\neg T\alpha(b)) = \underline{W}(T\alpha(\neg b))$ per $+ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, \top\}$

7) $\underline{W}(\neg(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))) \neq \underline{W}(T\alpha(a) \wedge \neg T\alpha(a))$

8) $\underline{W}(\neg(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a))) \neq \underline{W}(T\alpha(a) \wedge T\alpha(\neg a))$

9) $\underline{W}(\neg(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))) \neq \underline{W}(T\alpha(a) \vee \neg T\alpha(a))$

IO) $\underline{W}(\neg(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))) \neq \underline{W}(T\alpha(a) \vee T\alpha(\neg a))$

Tenendo presente che in un contesto bivalente " $\neq 0$ " é equivalente ad " I " rientriamo nella semantica esposta precedentemente.

Non ci sono diversità tra questa semantica al negativo e la precedente positiva se non nella espressione. Quest'ultima ha il vantaggio di porsi come più generale per catturare valutazioni che oltrepassano i due valori, come per esempio valutazioni trivalenti o polivalenti.

Siamo davanti ad una semantica più espressiva e più generica di quella positiva denominata classica o standard con il vantaggio di assorbirla totalmente.

Teorema 7bis. L'insieme $W_{\pi\tau}$ é l'insieme delle valutazioni associate con $\pi\tau$.

Prova. E' facile dimostrare che $\underline{W} \in W_{\pi\tau}$ se e solo se esiste un insieme di formule $\Sigma \cup \{a\}$ così che Σ é a-saturato e $\underline{W}$ é la sua funzione caratteristica.

NOTA

Se il postulato I) fosse sostituito con I.I) $T\alpha(\neg a) \rightarrow \neg T\alpha(a)$ non sarebbe possibile derivare il teorema 5 né gli schemi T 22 - T 42 sarebbero validi in Ht + I.I.

Introducendo la negazione classica "$\sim$" e ammettendo anche per essa il postulato I.Ibis $T\alpha(\sim a) \rightarrow \sim T\alpha(a)$ non sarebbe possibile derivare

$$(T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(b)) \rightarrow (T\alpha(\sim b) \rightarrow T\alpha(\sim a))$$

$$T\alpha(\sim\sim a) \rightarrow T\alpha(a)$$

Il postulato I.I per la negazione debole e quello I.Ibis per la negazione classica e/o forte richiederebbe una semantica trivalente e non più bivalente. Nella semantica negativa ~~daixxdi~~ della "diversità" da noi proposta un simile approccio sarebbe soddisfatto.

LA nostra semantica e le nostre valutazioni in negativo recuperano totalmente la semantica di Ht in senso positivo (bivalente), ma aprono la strada ad una possibile semantica trivalente ove l'insieme non é più $\{0,I\}$, ma potrebbe essere $\{0,I,2\}$ e la tautologia non assumerebbe più valore I come nella semantica bivalente bensì $\neq 0$, ove il diverso da zero potrebbero essere in senso positivo I,2 valori designati.

E' chiaro che in senso bivalente il concetto di tautologia non sarebbe affatto alterato, pur essendo espressa diversamente, mentre in chiave trivalente il concetto di tautologia verrebbe esteso a più di un valore designato.

Questo potrebbe essere utile per catturare in sede semantica concetti come "gradualità", "transitività", "movimento","divenire" ecc. in uno spazio-tempo non atomizzato o schematizzato come in un sistema standard.

Tutto questo assumendo come valido lo schema $\neg T\alpha(a) \rightarrow T\alpha(\neg a)$.

A conclusione del nostro lavoro possiamo vedere come sia possibile interpretare il nostro sistema in termini di Mondo possibile sia in chiave bivalente sia in chiave trivalente. Tenendo presente che non intendiamo per mondo possibile un approccio concettuale che permette di costruire un linguaggio dei mondi linguistici possibili come la ricerca dei modi in cui potremo concepire il linguaggio stesso in maniera diversa.

Un'altra nozione che potremmo cogliere in questo ambito é quella della VERITA' DI CONFINE, certamente lontana dalla definizione di verità sia tarskiana sia kripkiana, una verità fluttuante, nebulosa che catturi in se il senso della vaghezza e che possa essere un valido supporto proprio con certe situazioni non standardizzabili della fisica quantistica non ortodossa, alludo alle esperienze di Everett-Wheeler.

{+ - .}

Mondi possibili N	a	b
1	+	+
2	+	-
3	+	.
4	-	+
5	-	-
6	-	.
7	.	+
8	.	-
9	.	.

{+ -}

Mondi possibili N	a	b	c
1	+	+	+
2	+	+	-
3	+	-	+
4	+	-	-
5	-	+	+
6	-	+	-
7	-	-	+
8	-	-	-

{+ - .}

Mondi possibili N	a	b	c
1	+	+	+
2	+	+	-
3	+	+	.
4	+	-	+
5	+	-	-
6	+	-	.
7	+	.	+
8	+	.	-
9	+	.	.
10	-	+	+
11	-	+	-
12	-	+	.
13	-	-	+
14	-	-	-
15	-	-	.
16	-	.	+
17	-	.	-
18	-	.	.
19	.	+	+
20	.	+	-
21	.	+	.
22	.	-	+
23	.	-	-
24	.	-	.
25	.	.	+
26	.	.	-
27	.	.	.

REFERENCES

ARRUDA,A.I. I980,'A survey of paraconsistent logic,' in Mathematical Logic in Latin America, A.I.Arruda,R.CHuaqui and N.C.A.da Costa,editors,North Holland,pp.I-4

dA COSTA N.C.A. I974,'On the theory of inconsistent formal systems,' in Notre Dame Journal of Formal Logic I5 pp. 497-5IO

" I982, The philosophical import of paraconsistent Logic, in Journal of Non-Classical Logic I,pp.I-I9

" and Loparic A.I982,'Paraconsistency,Paracompleteness and Valutations,' in pre-publicacoes do Centro de Logica,Epistemologia e Histo~~t~~ria da Ciencia -CLE, UNICAMP, Campinas -SP,Brazil (to appear in Logique et Analise I984)

da COSTA N.C.A.I980,Ensaio sobre os fundamentos da logica, ed.HUCITEC,Sao Paulo Brazil

DALLA CHIARA SCABIA M.L.,'Istanti~~e~~ e individui nelle logiche temporali,'in Riv. di filos. I973

GRANA N.I983,Logica Paraconsistente,ed.Loffredo NAPOLI

RESCHER N. and GARSON J.I968,'Topological Logic',J.S.L. vol.33 pp.537-48

von WRIGHT G.H. I969,Time,Change and COntradiction (Cambridge University Press, Cambridge)pp.I -32