Lima 28 de Octubre de 1974

Querido Newton:

ayer llegué de Panamá y hoy me apresuro a escribirte, pues creo que ya tengo la solución. Mi viaje a Panamá fue muy interesante. Hablé en la Universidad sobre Kant y el problema de los juicios sintéticos apriori, y sobre Humanismo y revolución. Conocí además, a Torrijos. Ya te contaré en otra ocasión. Ahora vamos al grano, pues necesito tu opinión más que nunca.

Para que comprendas bien los problemas con que me estoy enfrentando, te hago una exposición detallada de las motivaciones que me han inducido a buscar un conjunto de postulados diferente de los usuales.

1º En ningún momento he tenido deseos de originalidad. Las razones han sido estrictamente pedagógicas y teóricas.

2º Quiero eliminar de la lógica de primer orden el uso de enunciados abiertos. Esto se debe a dos razones. Una pedagógica, pues los estudiantes tienen gran dificultad para comprender la regla:

$$\frac{(\forall\alpha)F(\alpha)}{F(\alpha)}$$

o el axioma:

$$(\forall\alpha)F(\alpha) \Rightarrow F(\alpha)$$

(me refiero a los estudiantes de nivel elemental). Ello se debe a que no es intuitiva. Porque si $F(\alpha)$ es un enunciado abierto, no es una proposición y tanto la regla como el axioma, imponen el paso de una proposición a un enunciado abierto. Claro que es un enunciado abierto que, cuando interpretado, resulta verdadero para todos los valores de "α". Pero de todas maneras, de acuerdo con la tradición lógica y con nuestra intuitición, de proposiciones verdaderas se deducen proposiciones verdaderas. Por eso dicha regla y dicho axioma se presentan mucho mejor de la siguiente manera:

$$\frac{(\forall\alpha)F(\alpha)}{F(\beta)}$$

$$(\forall\alpha)F(\alpha) \Rightarrow F(\beta)$$

en que "α" es una letra esquemática que puede especificarse por cualquiera de las constantes del lenguaje formal. Se supone que no se trata de un sistema <u>puro</u> (sin constantes individuales) sino aplicado, es decir con un conjunto finito o infinito (enumerable) de constantes individuales. ~~[illegible]~~ . La ventaja de este procedimiento es que en este caso tanto $(\forall\alpha)F(\alpha)$ como $F(\beta)$ son proposiciones cuando se interpretan.

3º En muchos sistemas axiomáticos, por ejem, en el de Church o en el de Copi, hay un axioma como el siguiente:

$$(\forall x)[A \Rightarrow B] . \Rightarrow . A \Rightarrow (\forall x)B$$

en que "x" no está libre en A. O también:

$$A \Rightarrow (\alpha\forall)A$$

si "α" no está libre en A.

Esto significa que una expresión como:

$$F(a) \Rightarrow (\forall x)F(a)$$

es falsa

Ahora bien, desde el punto de vista intuitivo, una expresión como "$(\forall x)F(a)$" o como $(\forall x)F(y)$ no significa absolutamente nada. Para dar le significación, hay que hacer la convención de que ~~xwxwxwx~~ "$(\forall\alpha)A$" es lo mismo que "A" cuando "α" no está libre en A. Pero entonces expresiones como "$A \Rightarrow (\forall x)A$ significan $A \Rightarrow A$. De manera que la existencia de axiomas como los descritos sólo tienen una justificación: son cómodos. En efecto, para demostrar la complección de la lógica de primer orden con el método de Henkin, o para demostrar que ciertos sistemas axiomáticos de primer orden son equivalentes al sistema de la deducción natural, axiomas como los mencionados facilitan grandemente la demostración.

Pero yo estoy convencido de que los axiomas básicos, es decir los axiomas lógicos, deben tener una fundamentación intuitiva, en el sentido de que sean claros y evidentes a la razón. Todo pragmatismo debe rechazarse en lógica. Por eso en el sistema que busco, no deben existir axiomas como los citados.

4º Me interesa además un sistema que faciliten las demostraciones metateóricas. Y como la no utilización de los mencionados axiomas la dificulta, es conveniente construir un sistema con el menor número posible de reglas de derivación. No debes olvidar que mi interés principal en el libro que he escrito es pedagógico y que, por eso, quiero facilitar su lectura al lector con formación elemental. Por eso la única regla que utilizo es el modus ponens, pues todas las demás reglas, con los debidos reajustes se pueden introducir como axiomas (los conceptos de regla de inferencia y axioma (con excepción del modus ponens) son relativos). Este procedimiento facilita grandemente la demostración del teorema de la deducción, por ejem.

Hecha esta explicación, que te permitirá comprender por qué elaboré el primer sistema, te presento ahora el sistema que he elaborado después de recibir tu primera carta(acabo de recibir,mientras escribo ésta, tu carta del 23 del pte, que me ha gustado mucho,ya verás por qué).

Salto la descripción de los ~~términos~~ símbolos primitivos.Las reglas de formación permiten formar fórmulas como F(x), es decir,enunciados abiertos cuyo uso puede ser util para describir reglas, pero que nunca se usan como axiomas ni como teoremas, ni como pasos intermedios(que serían también teoremas).Tampoco es posible poner $(\forall\ )A$ para cualquier A.

EA1 $A. \Rightarrow .B \Rightarrow A$

EA2 $A. \Rightarrow .B \Rightarrow C: \Rightarrow :A \Rightarrow B. \Rightarrow .A \Rightarrow C$

EA3 $\sim A \Rightarrow \sim B. \Rightarrow .B \Rightarrow A$

EA4 $(\forall\alpha)F(\alpha) \Rightarrow F(\beta)$

EA5 $C \Rightarrow F(\beta). \Rightarrow .C \Rightarrow (\forall\alpha)F(\alpha)$ (en que C es una fórmula cerrada cualquiera que no pueda ser derivada de $F(\alpha)$ sustituyendo la variable "α" por una constante individual cualquiera(de las existentes en el sistema).

Esta última restricción es para evitar fórmulas como:

$F(\beta) \Rightarrow F(\beta). \Rightarrow .F(\beta) \Rightarrow (\forall\alpha)F(\alpha)$

La restricción es el equivalente de:en que C no tiene la variable libre "α" y ~~en que~~ es posible poner $(\forall\alpha)A$ para cualquier A.

$(\exists\alpha)F(\alpha)$ se define por medio de $(\forall\alpha)F(\alpha)$:

$(\exists\alpha)F(\alpha). \Leftrightarrow .\sim(\forall\alpha)\sim F(\alpha)$

La única regla de inferencia es el <u>modus ponens</u>. En este sistema es fácil demostrar:

$F(\beta) \Rightarrow (\exists\alpha)F(\alpha)$

y

$F(\beta) \Rightarrow C. \Rightarrow .(\exists\alpha)F(\alpha) \Rightarrow C$

en que se impone la misma restricción a C

Como te digo en mi primera carta "α" es una letra esquemática que puede especificarse por cualquier variable individual, y "β" una letra esquemática que puede especificarse por cualquier constantes individual(en ambos casos del sistema utilizado). De esta manera se evita la utilización de enunciados abiertos y se cumple con la exigencias intuitiva y con la exigencia teórica. Además el sistema tiene la ventaja de que no es necesario tomar precauciones para evitar que los cuantificadores "cacen" variables de manera indebida, puesto que no hay variables libres y esto simplifica el manejo de las fórmulas.

Como te habrás dado cuenta el sistema propuesto está inspirado en el sistema de Bernays que expone Kleene en su Mathematical Logic, pág 107 y sigts. Pero como introduce $\exists$ por definición es más simple pues deduce $F(\beta) \Rightarrow (\exists\alpha)F(\alpha)$ de $(\forall\alpha)F(\alpha) \Rightarrow F(\beta)$. Además en lugar de las dos reglas de derivación, introduce un sólo axioma, puesto que la otra se deriva como ~~axioma~~ teorema (es decir de EA_5). Desde luego no se trata de axiomas sino de esquemas axiomáticos para evitar la regla de sustitución que introduce dificultades en las demostraciones metateóricas.

Por *modus ponens* de ~~Ex~~ , EA_5 se deriva la regla: de $C \Rightarrow F(\beta)$, se deriva $C \Rightarrow (\forall\alpha)F(\alpha)$. Y del teorema: $F(\beta) \Rightarrow C. \Rightarrow .(\exists\alpha)F(\alpha) \Rightarrow C$ se deriva la regla, de $F(\beta) \Rightarrow C$, se deriva $(\exists\alpha)F(\alpha) \Rightarrow C$. Con EA_4, el teorema $F(\beta) \Rightarrow (\exists\alpha)F(\alpha)$, EA_5 y el anterior teorema (pág 4), se tienen las condiciones ~~necesarias~~ requeridas para mostrar que el sistema propuesto es equivalente a cualquier sistema de deducción natural. Kleene demuestra que es equivalentr al sistema de Gentzen. Pero puede adaptarse perfectamente bien la demostración de Copi a la demostración de la equivalencia a un sistema en que existen las cuatro reglas: generalización universal, especificación universal, generalización existencial y especificación existencial. Además, esto puede demostrarse sin recurrir a Copi. Y puede demostrarse que el sistema de deducción natural que, según me dices, ~~es~~ podría ser interesante, y que es el que te menciono en mi primera carta (tratando de forzarlo a convertirse en sistema axiomático) también es equivalente al propuesto.

En realidad en mi libro incluyo todos los métodos: el de las tablas semánticas de Beth (una adaptación de la presentación de Smullyan), el de la deducción natural y el axiomático. Y precisamente, el sistema que ~~prepongo~~ propongo para la deducción natural es el que se refleja en los dos axiomas que, según tú, no tienen sentido, porque las restricciones que se hacen, dependen de la noción de deducción (esto un punto

(desde luego no como axiomas)

que desearía comentar en una pxma. carta). Por eso te decía que tu carta me ha gustado tanto, porque, efecti~~v~~amente, el sistema que pr~~p~~pongo para la deducción natural incluye EA_4 y EA_5 como ~~son~~ reglas de dicho sistema.

Como bien dices, tengo que enviarte las cosas que están en el libro. En un principio sólo pensé enviarte el capítulo sobre conjuntos, pues no creí encontrar dificultades en lógica. Pensaba exponer cualquiera de los sistemas en boga, por ejem, el de Church, el de Copi o cualquier otro. Pero conforme escribía el libro, iba descubriendo una serie de problemas pedagógicos, que me llevaron a captar problemas teóricos muy profundos. De un lado me di cuenta que los sistemas de Suppes y de Quine de deducción natural tienen demasiadas complicaciones para el uso de las variables. De otro lado, los sistemas como el ~~de Gentzen y~~ de Scholz, Copi, etc. tienen las reglas:

$$\cancel{\frac{(\exists x)F(x)}{F(x)}} \qquad \frac{(\exists\alpha)F(\alpha)}{F(\alpha)}, \quad \frac{F(\beta)}{(\exists\alpha)F(\alpha)}, \text{ etc}$$

(con las consabidas restricciones)

que, desde un punto de vista estrictamente teórico ~~es~~ son objetable por las razones expuestas. Por último, analizando a fondo la argumentación de Russell, basada en Frege, sobre la deducción matemática, en la que justifica el paso de F(x) a $(\forall x)F(x)$, en caso de F(x) se haya deducido previamente de alguna fórmula con cuantificación universal, llegué a la conclusión de que ~~no~~ dicho argumento adolece de un defecto grave: el matemático no procede de la manera descrita por Russell. En apariencia procede así, da la impresión de decir: de $(\forall x)G(x)$ se deriva G(x) y si $G(x) \Rightarrow F(x)$, entonces $(\forall x)F(x)$. Pero de manera estricta lo que hace el matemático es lo siguiente. Si ha demostrado $(\forall x)G(x)$ (o es un axioma), entonces elige un objeto cualquiera de su universo, por ejem, a, y de $(\forall x)G(x)$ pasa a G(a). Si luego, de G(a) <u>deduce</u> F(a), entonces llega a la conclusión de que $(\forall x)F(x)$. Esto significa que el matemático, y cualquier persona que utiliza de manera espontánea la lógica, está utilizando el <u>concepto semántico de deducción</u> en el sentido de que si F(a) es consecuencia lógica de G(a), entonces todo modelo de G(a) es modelo de F(a). Y por esta razón se puede poner $(\forall x)F(x)$, pues sea cual sea el significado de "a", es decir el valor de "x", "F(a)" resulta verdadera.

Seguramente todas estas consideraciones te parezcan demasiado bizantinas. Pero eso se debe a que tu, aunque eres filósofo, eres (no quiero herir tu modestia,pero si no lo fueras no me habría dado el trabajo de consultarte)un gran matemático.Y como matemático es inevitable que tengas ciertas tendencias al pragmatismo.Para qué tantas objeciones al uso de enunciados abiertos, si cuando se usan, *the system works*, y muy bien, y de manera fácil. Pero yo soy filósofo,en realidad no soy sino un filósofo,más o menos informado sobre cuestiones de lógica y de metateoría,porque considero que el problema central de la filosofía es el análisis del conocimiento racional y que la única manera de poder avanzar en este análisis, es *meterse en el vientre del monstruo*, es decir en la lógica, la matemática y la metateoría.

Ahora bien, mi posición como filósofo es el *racionalismo*, crítico,por cierto,pues, el racionalismo,por definición, no puede ser dogmático.Y por eso creo que todo pragmatismo debe ser eliminado de la lógica. Si la lógica se funda únicamente en su utilidad y sus fórmulas no tienen, por lo menos en algún aspecto esencial, *evidencia racional*, entonces la *lógica es una basura*(varredura) y no me interesa.Es cierto que hay innumerables sistemas lógicos que parecen muy diferentes entre sí.Pero todos tienen un núcleo de racionalidad común. Prueba de ello es que las lógicas de los sistemas inconsistentes,que son las que más parecen alejarse de la tradición, tienen que aceptar todas, un conjunto de fórmulas privilegiadas, teoremas en relación a los cuales no puede derivarse la fórmula contradictoria.

Lo que estoy tratando de hacer es deslindar este *núcleo común de racionalidad* y para eso estoy elaborando una teoría de la razón.El libro que estoy escribiendo tiene esa finalidad.Lo que sucede es que para deslindar este núcleo común de racionalidad hay que meterse tan hondo en cuestiones de lógica y de filosofía de las matemáticas, que el que no conoce bien estas disciplinas no puede entender nada de lo que digo.Y como quiero que me entiendan los filósofos he decidido comenzar por una *propedéutica* es decir por una introducción pedagógica a la lógica y a los conjuntos.

Como te decía, en un comienzo creí que la exposición pedagógica de la lógica en su nivel elemental no me traería problemas.Pero como he escrito el texto teniendo ya ciertas ideas sobre lo que debe ser la lógica (que se alejan mucho de la tradición pragmatista de la lógica formal a la que estamos acostumbrados) me he topado con grandes dificultades. Lo malo es que,como desde un principio pensé consultarte el capítulo referente a conjuntos,hice sacar copia, en papel de avión, del texto,pero en cambio sólo tengo una mala copia del texto de lógica.De todas maneras sacaré copia fotostática de las partes principales del texto y te las enviaré.Pues ahora me doy cuenta que puede haber errores que me han pasado desapercibidos,debido a mi falta de profesionalismo matemático. Pronto te envío estos textos.

Te ruego me perdones lo largo de esta carta,pero tus reflexiones han sido para mí una gran motivación y he creído necesario que veas con claridad cual es el horizonte en el cual se desarrolla todo el libro pues de otra manera encontrarías detalles que te desconcertarían. Te rogaría,que antes de recibir los originales, me respondas si encuentras correcto el nuevo sistema que te presento. Trata de encontrarle todas las fallas que puedas,pues quiero que mi libro esté libre de errores elementales.

No te olvides también de indicarme la fecha en que podrías venir al Perú.Creo que podrías dar conferencias tanto de lógica como de filosofía matemática que serían magníficas.

Con un abrazo