Alguns Cálculos Proposicionais para Sistemas Dedutivos Inconsistentes. *

Ayda Ignez Arruda *

I- Introdução.

Juntamente com o Prof. N.C.A. da Costa edificamos em (3) cálculos proposicionais denominados $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$ e demonstramos que em tais cálculos não valiam as leis de absorção (no sentido de Moh Shaw-Kwei (8)). Aparentemente tais cálculos permitem construir teorias de conjuntos onde tôda relação seja coletivizante no sentido de Bourbaki (4). Posteriormente, em (2), fortalecemos os sistemas $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$ originais, mantendo a mesma denominação, e estruturamos os cálculos de predicados, de predicados com iguladade, e álgebras de conjuntos correspondentes. Até o presente estágio de nossas pesquisas , parecem se confirmar as suposições iniciais quanto ao axioma da separação.

Contudo, em (3) e (2), aparecem muitos problemas em aberto. Resolvemos grande parte dêles e isto permitiu um desenvolvimento mais completo de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$, bem como a estruturação de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_1^*$. Êstes são mais fortes que aquêles e conservam as características mencionadas anteriormente. O presente desenvolvimento de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_1^*$ sugere que êstes são, aparentemente, alguns dos cálculos proposicionais mais convenientes para a edificação de teorias de conjuntos onde o axioma da separação possa ser mantido sem restrições.

No que segue, reestruturamos os cálculos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$, eliminando um postulado que figurava nas versões anteriores e que provamos não ser independente dos demais. Omitiremos aqui demonstrações de teoremas que figurarem em (2) e (3). Na secção III estruturaremos os cálculos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_1^*$. Finalmente, na secção IV, mencionaremos certos cálculos sugeridos pelos Professôres Mário Tourasse Teixeira e pelo Prof. N.C.A. da Costa e que são obtidos diretamente dos cálculos aqui apresentados pela introdução de um novo postulado que permita certos tipos de redução de negações. Quanto ao cálculo de predicados, de predicados com igualdade, álgebras de conjuntos e algebrização dêstes cálculos proposicionais já publicamos os primeiros resultados em (1) e (2).

Observaremos, ainda, que no decorrer do trabalho usamos várias matrizes infinitas; assim sendo, existem diversas variações das mesmas que servem aos propósitos para os quais as primeiras foram mencionadas. A escolha de uma entre essas matrizes de mesmas características foi arbitrária; geralmente usamos a primeira encontrada.

Quanto à notação é a de Kleene (7) com modificações óbvias, observando-se que o símbolo $\Rightarrow$ será usado metamatemàticamente.

Lembraremos, ainda, que alguns dos problemas aqui resolvidos foram propostos pelo Prof. N.C.A. da Costa, cujo interêsse pelo nosso trabalho agradecemos.

II- Cálculos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$.

A axiomática de $\mathcal{P}$ é a seguinte:

1. $A \supset A$

2. $(A \supset A) \supset (B \supset B)$

3. $\dfrac{A \quad , \quad A \supset B}{B}$

4. $\dfrac{A \supset B \quad , \quad B \supset C}{A \supset C}$

5. $A \,\&\, B \supset A$

6. $A \,\&\, B \supset B$

7. $\dfrac{A \;;\; B}{B}$

8. $\dfrac{A \supset B \quad , \quad A \supset C}{A \supset B \,\&\, C}$

9. $A \supset A \vee B$

10. $B \supset A \vee B$

11: $\dfrac{A \supset C \quad , \quad B \supset C}{A \vee B \supset C}$

12. $A \,\&(B \vee C) \supset (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$

13. $A \vee \neg A$

14. $\neg\neg A \supset A$

A axiomática de $\mathcal{P}^*$ é dada pelos postulados de $\mathcal{P}$ e, ainda,

15. $\dfrac{A \supset B \quad , \quad A \supset \neg B}{\neg A}$

<u>Teorema LI-1</u>. $\mathcal{P}$ é subcálculo próprio de $\mathcal{P}^*$.

<u>Teorema II-2</u>. Valem em $\mathcal{P}$ (e em $\mathcal{P}^*$), entre outros, os seguintes esquemas e regras:

$(A \sim B) \sim (B \sim A)$

$A \,\&\, A \sim A$

$A \,\&\, B \sim B \,\&\, A$

$A \,\&\, (B \,\&\, C) \sim (A \,\&\, B) \,\&\, C$

$A \,\&(B \vee C) \sim (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$

$A \,\&(B \vee C) \sim (A \,\&\, B) \vee C$

$A \,\&\, (B \vee A) \sim A$

$A \supset B \vdash A \,\&\, C \supset B \,\&\, C$

$A \sim B \vdash A \,\&\, C \sim B \,\&\, C$

$(A \sim B) \sim ((A \supset B) \,\&\, (B \supset A))$

$A \sim A$

$A \vee A \sim A$

$A \vee B \sim B \vee A$

$A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$

$A \vee (B \,\&\, C) \sim (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$

$(A \,\&\, B) \vee (C \,\&\, D) \supset (A \vee C) \,\&\, (B \vee D)$

$A \vee (B \,\&\, A) \sim A$

$A \supset B \vdash A \vee C \supset B \vee C$

$A \sim B \vdash A \vee C \sim B \vee C$

<u>Definição</u>. $\phi_1(A,B)$ por $A \supset B$

$\phi_n(A,B)$ por $A \supset \phi_{n-1}(A,B)$ $\quad (n \geqslant 2)$

<u>Teorema II=3</u>. Não valem em $\mathcal{P}^*$ (e $\mathcal{P}$), entre outros, os seguintes esquemas e regras:

$(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$

$(A \supset B) \,\&\, (B \supset C) \supset (A \supset C)$

$((A \supset B) \supset A) \supset A$

$B \supset (A \supset (A \supset B))$

$\Gamma, A \vdash B \Longrightarrow \Gamma \vdash A \supset B$

$(A \supset (B \supset C)) \supset (A \,\&\, B \supset C)$

$(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

$(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

$B \supset (A \supset B)$

$A \supset (B \supset (A \,\&\, B))$

$B \supset (A \supset (B \supset A))$

$A, B \vdash A \supset B$

$(A \,\&\, B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$

$A \,\&\, \neg A \supset B$

$(A \supset B) \supset (A \,\&\, C \supset B \,\&\, C)$ $\quad (A = 1, B = 3 \quad C = 1)$

$(A \supset B) \supset (A \vee C \supset B \vee C)$ $\quad (A = 1, B = 3, C = 5$

$A \vdash B \Longrightarrow \vdash A \supset B$ (em P e P_G)

$(A \supset B) \supset (\neg A \vee B)$

$A \,\&\, \neg A \supset \neg B$		$A \supset (\neg A \supset B)$
$A \supset (\neg A \supset \neg B)$	$A, \neg A \vdash B$	$A, \neg A \vdash \neg B$
$\emptyset_{n+1}(A,B) \supset \emptyset_{n}(A,B)$		$\emptyset_{n+1}(A,B) \vdash \emptyset_{n}(A,B)$
$A \supset B, A \supset (B \supset C) \vdash A \supset C$		$\neg(A \,\&\, \neg A) \vdash A \supset B$
$A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$		$\neg A \vee \neg B \supset A \supset B$
$\neg(A \vee \neg B) \vdash \neg(A \,\&\, B)$		$\neg A \,\&\, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

<u>Teorema II-4.</u> Em $\mathcal{P}$ não vale o esquema $\neg(A \,\&\, \neg A)$, porém o mesmo é demonstrável em $\mathcal{P}^*$.

<u>Teorema II-5</u>. Em $\mathcal{P}^*$ não valem as seguintes regras

a) $A \vdash C \;,\; B \vdash C \Longrightarrow A \vee B \vdash C$

b) $A \vdash B \;,\; A \vdash B \Longrightarrow \neg A$

c) $\neg A \vdash B \;,\; \neg A \vdash \neg B \Longrightarrow A$

<u>Demonstração</u>: Formalizaremos o símbolo $\vdash$ usando a axiomática mencionada em Kleene (7), pág. 89,; definiremos ainda uma "conjunção", $\wedge$, válida entre fórmulas ou sequências de fórmulas tal que $\Gamma \wedge A$ é Γ, A . Assim sendo, aos postulados de $\mathcal{P}^*$,modificados de maneira óbvia , devemos reunir, ainda, os seguintes:

1. $E \vdash E$

2. $\dfrac{\Gamma \vdash E}{C \wedge \Gamma \vdash E}$

3. $\dfrac{C \wedge C \wedge \Gamma \vdash E}{C \wedge \Gamma \vdash E}$

4. $\dfrac{\Delta \wedge C \wedge D \wedge \Gamma \vdash E}{\Delta \wedge D \wedge C \wedge \Gamma \vdash E}$

5. $\dfrac{\Delta \vdash C \;,\; C \wedge \Gamma \vdash E}{\Delta \wedge \Gamma \vdash E}$

Seja, agora, $M = \langle N, I, \supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \vdash \rangle$ uma matriz onde as funções $\supset$, & , $\vee$, $\neg$, $\wedge$, $\vdash$ são definidas como segue, v uma função tal que $v: \mathcal{P}^* \rightarrow N$, <u>nd</u> abreviando " não distinguido" e <u>d</u> abreviando " distinguido", $v_{nd}: \mathcal{P}^* \rightarrow P$ e $v_d: \mathcal{P}^* \rightarrow I$ (onde N,P eI representam o conjunto dos números naturais, pares e ímpares respectivamente, o último dos quais é o conjunto dos valôres distinguidos em M)

$\supset$: $v(A \supset B) = 1$ se a) $v(A) = v(B)$,
b) $v(A)$ e $v(B)$ não distinguidos,
c) $v(A) < v(B)$ ambos distinguidos,
d) $v(A) = nd$ e $v(B) = d$;

$v(A \supset B) = 2$ se a) $v(A) = d$ e $v(B) = nd$,
b) $v(A) > v(B)$ ambos distinguidos.

& : $v(A \,\&\, B) = v_{nd}(\, v(A), v(B))$,
" ~~= Min. (v(A), v(B)) quando ambos forem distinguidos,~~
" = Máx. (v(A), v(B)) quando ambos forem não distinguidos.

V : $v(A \vee B) = v_d(v(A), v(B))$,

" $= \text{Máx}$ ~~$(v(A), v(B))$, ambos distinguidos.~~

" $=$ ~~2 se v(A)~~ e v(B) são não distinguidos

$\neg$: $v(A) = 1$ então $v(\neg A) = 1$

$v(A) = 2n$ então $v(\neg A) = 2n+1$

$v(A) = 2n+1$ então $v(\neg A) = 2n$.

$\wedge$: a) se Γ é uma sequência vazia então $v(\Gamma \wedge A) = v(A)$

b) se Γ não é uma sequência vazia então:

$v(\Gamma \wedge A) = v_{nd}(v(\Gamma), v(A))$ ou

$v(\Gamma \wedge A) = \text{Máx}\,(v(\Gamma), v(A))$.

$\vdash$: a) se Γ é uma sequência vazia então $v(\Gamma \vdash A) = v(A)$,

b) se Γ não é uma sequência vazia então,

$v(\Gamma \vdash A) = 1$ se b.1. $v(\Gamma) = v(A)$,

b.2. $v(\Gamma) > v(A)$ ambos não distinguidos,

b.3. $v(\Gamma)$ e $v(A)$ ambos distinguidos,

b.4. $v(\Gamma) = nd$ e $v(A) = d$.

$v(\Gamma \vdash A) = 2$ se $v(\Gamma) = d$ e $v(A) = nd$ ou

$v(\Gamma) < v(A)$ ambos não distinguidos.

Fàcilmente se verifica que esta matriz satisfaz todos os postulados de $\mathcal{P}^*$ e que não satisfaz as regras em consideração, pois:

a) basta considerar $v(A) = v(B) = v(C) > 2n$ $(n > 1)$;

b) basta considerar $v(A) = d$ e maior que 1 e $v(B) = 1$;

c) basta considerar $v(A) = nd$ e $v(B) = 1$.

Em Costa (5) foi introduzido o conceito de cálculo infinitamente trivializável. Contudo, como nos cálculos considerados nêsse trabalho eram válidos o teorema da dedução e a regra de modus pones, os conceiíóbvios de cálculo $\vdash$-infinitamente trivializável e cálculo $\supset$-infinitamente trivializável eram equivalentes. Porém, em sistemas onde não seja válido o teorema da dedução tais conceitos não são necessàriamente equivalentes. Êste é o caso dos sistemas aqui estudados.

<u>Corolário 1.</u> O cálculo $\mathcal{P}^*$ é $\vdash$-infinitamente trivializável.

<u>Demonstração</u>. Sendo F uma fórmula fixa a expressão $F \vdash A$ não é válida em $\mathcal{P}^*$. Pois, pela matriz M se tomarmos $v(F) = d$ basta considerar um A tal que $v(A) = nd$ e se $v(F) = nd$ consideraremos um A tal que $v(A) = nd$ e maior que o valor de F.

<u>Corolário 2.</u> O cálculo $\mathcal{P}^*$ é $\supset$-infinitamente trivializável.

Demonstração: Se $\mathcal{P}^*$ fôsse $\supset$ -finitamente trivializável teríamos $F \supset A$ sendo F uma fórmula fixa. Porém disso decorre $F \vdash A$, o que é absurdo pelo corolário 1 .

Corolário 3. O cálculo $\mathcal{P}$ é $\vdash$ -infinitamente trivializável e $\supset$ -infinitamente trivializável.

Demonstração: $\mathcal{P}$ e subcálculo de $\mathcal{P}^*$.

Corolário 4. Em $\mathcal{P}^*$ (e em $\mathcal{P}$) se F for uma fórmula fixa a fórmula $A \supset F$ não é válida.

Demonstração: Se $v(F) = nd$, pela matriz M, basta considerar um A tal que $v(A) = d$ e se $v(F) = d$ toma-se um A tal que $v(A) = d$ e maior que o valor de F. Êste corolário é importante porque evidência que certas álgebras $\mathcal{P}^*$ (e $\mathcal{P}$) não têm maior elemento.

Teorema II-6. Em $\mathcal{P}^*$ (e em $\mathcal{P}$) não vale o esquema $\neg_p A \supset \neg_q A$, $p < q$, ($\neg_p A$ abrevia p negações sucessivas de A).

Demonstração: Seja $M_1 = \langle N, I, \supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \vdash \rangle$ uma matriz onde as funções que nela figuram são definidas como segue, usando-se as convenções do teorema II-5.-

$\supset$: $v(A \supset B) = 1$ se a) $v(A) = v(B)$
b) $v(A) > v(B)$, ambos não distinguidos,
$v(A \supset B) = v(B)$ nos demais casos

$\&$: $v(A \& B) = v_{nd}(v(A), v(B))$,
" $= \text{Máx.}(v(A), v(B))$.

$\vee$: $v(A \vee B) = v_d(v(A), v(B))$,
" $= \text{Mín.}(v(A), v(B))$.

$\neg$: $v(\neg A) = v(A) + 1$.

$\wedge$ e $\vdash$ são definidas como na matriz M do teorema II-5.
Fàcilmente se verifica que esta matriz satisfaz todos os postulados de $\mathcal{P}^*$ e que não satisfaz o esquema em consideração.

Corolário 1. $\mathcal{P}^*$ (e $\mathcal{P}$) não é decidível por matrizes finitas.

Demonstração. Se $\mathcal{P}^*$ fôsse decidível por matrizes finitas existiria um q e um p , $p < q$, para os quais as matrizes de $\neg_p A$ e $\neg_q A$ seriam iguais. Como $A \supset A$ é postulado do sistema, teríamos $\neg_p A \supset \neg_q A$ válido, o que é absurdo pelo teorema em consideração, Corolário 2. A regra $\neg_p A \vdash \neg_q A$ não é válida em $\mathcal{P}^*$ (e em $\mathcal{P}$).

Demontração: Idêntica à demonstração de teorema considerando-se agora a função $\vdash$ em lugar de $\supset$.

Corolário 3. Se F é uma fórmula fixa então $F \vdash A$ e, consequentemente $F \supset A$, não é válida em $\mathcal{P}^*$ (e $\mathcal{P}$).

Demonstração: Análoga as dos corolários 1 e 2 do teorema II-5.

Observação: Em (5) o Prof. N;C;A; da Costa introduziu uma hierarquia de cálculos prposicionais apropriados para o estudo de sistemas formais inconsistentes, sendo que o último cálculo nessa hierarquia foi denominado $\mathcal{C}_\omega$. No mesmo trabalho o Prof. Cosra demonstra que $\mathcal{C}_\omega$ é infinitamente trivializável , porém sua demonstração não está correta. ~~Porém~~ mas em (6) o Prof. Costa e o Prof Marcel Guillaume demonstraram o mesmo fato mediante matrizes. A nossa matriz M_1 satisfaz todos os postulados de $\mathcal{C}_\omega$ e não satisfaz $F \supset A$, onde F é uma fórmula fixa. Logo, com M_1 demonstramos que $\mathcal{C}_\omega$ é infinitamente trivializável e com vantagem sôbre a demonstração dada em (6), pois a matriz M_1 é mais simples e manejável que aquela. Da mesma forma o teorema II-6 e seus corolários se aplicam ao cálculo $\mathcal{C}_\omega$.

III - Cálculos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_1^*$.

O teorema II-5 sugere a estruturação de novos cálculos a partir de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$ e que mantenham as mesmas carcterísticas que êstes. Estudaremos aqui os cálculos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_1^*$ obtidos, respectivamente, de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$ pela introdução de um novo postulado. Assim sendo, os postulados de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_1^*$ são, respectivamente, os de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$ mais:

$$16.\quad \frac{A \vdash C \quad , \quad B \vdash C}{A \vee B \vdash C}$$

Teorema III-1. $\mathcal{P}_1$ é sucálculo próprio de $\mathcal{P}_1^*$.

Teorema III-2. $\mathcal{P}$ é subcálculo de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}^*$ é subcálculo de $\mathcal{P}_1^*$.

Ambos os teoremas são consequências imediatas dos teoremas II-1 e II-4, respectivamente.

Teorema III-3. O teorema II-2 é válido em $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_1^*$.

Demonstração: Consequência do teorema III-2.

Teorema III-4. Tôdas as fórmulas que não eram válidas em $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$ e cuja demonstração era obtida pelas matrizes dos teoremas 10 e 18 de (3), continuam não valendo em $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_1^*$ respectivamente.

Demonstração: Consideram-se as matrizes M_2 e M_3 seguintes: $M_2 = \langle \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,5\}, \supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \rightarrow \rangle$ dada como segue e onde as definições de $\supset$, &, V, $\neg$ são as da matriz do teorema 10 de (3),

$A \supset B$	1	2	3	4	5
$\vdash$ 1	1	1	3	4	1
2	1	1	3	4	1
3	1	3	1	4	1
4	1	1	1	1	1
5	3	3	3	4	1

A & B	1	2	3	4	5
1	1	2	4	4	1
2	2	2	4	4	2
3	4	4	3	4	3
4	4	4	4	4	4
5	1	2	3	4	5

A V B	1	2	3	4	5
1	1	1	5	1	5
2	1	2	5	2	5
3	5	5	3	3	5
4	1	2	3	4	5
5	5	5	5	5	5

A	$\neg$ A
1	3
2	4
3	1 $\rightarrow$ 2
4	2
5	3

e, para completar a definição das funções $\wedge$ e $\vdash$ quando Γ for uma sequência vazia colocaremos $v(\Gamma \wedge A) = v(A)$ e $v(\Gamma \vdash A) = v(A)$.

A matriz M_3 é definida como M_2, com exceção da função $\neg$ que passará a ser definida como segue

A	$\neg$ A
1	2
2	2
3	5
4	5
5	4

Teorema III-5. Em $\mathcal{P}_1^*$ (e $\mathcal{P}_1$) as seguintes não são válidas:

a) $A \vdash B \;,\; A \vdash \neg B \Longrightarrow \neg A$

b) $\neg A \vdash B \;,\; \neg A \vdash \neg B \Longrightarrow A$

Demonstração. Usa-se uma matriz M' definida como a matriz M do teorema II-5, substituindo-se na definição da função V a clausula $v(A \vee B) = 2$ por $v(A \vee B) = \mathrm{Min}\,(v(A), V(B))$ quando ambos forem não distinguidos.

Teorema III-6. Em $\mathcal{P}_1$ (e $\mathcal{P}_1^*$) valem as regras:

$A \vdash B \Longrightarrow A \& C \vdash B \& C$ e $A \vdash B \Longrightarrow A \vee C \vdash B \vee C$;

Demonstração: Imediata, pelos postulados do sistema.

Teorema III-7. O cálculo $\mathcal{P}_1^*$ é $\vdash$-infinitamente trivializável.

Demonstração: Consideramos a matriz $M_4 = \langle N, I, \supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \vdash \rangle$ cujas funções são definidas como segue observando-se convenções análogas as do teorema II-5.

$\supset$: $v(A \supset B) = 1$ se a) $v(A) = v(B)$

b) $v(A) > v(B)$, ambos não distinguidos,

c) $v(A) < v(B)$, ambos distinguidos,

d) $v(A) = nd$ e $v(B) = d$,

$v(A \supset B) = 2$ se a) $v(A) < v(B)$ ambos não distinguidos,

b) $v(A) > v(B)$ ambos distinguidos,

c) $v(A) = d$ e $v(B) = nd$.

& : $v(A \,\&\, B) = v_{nd}(v(A), v(B))$,

" $= \text{Máx}(v(A), v(B))$ ambos não distinguidos,

" $= \text{Min.}(v(A), v(B))$ ambos distinguidos.

$\vee$: $v(A \vee B) = v_d(v(A), v(B))$,

" $= \text{Min.}(v(A), v(B))$ ambos não distinguidos,

" $= \text{Máx.}(v(A), v(B))$ ambos distinguidos.

$\neg$: $v(A) = 2n$ então $v(\neg A) = 2n - 1$

$v(A) = 2n-1$ então $v(\neg A) = 2n$.

$\wedge$ e $\vdash$ definidas como na matriz M do teorema II-5.
Em vista de tal matriz o teorema decorre de modo análogo ao do Corolário 1 do teorema II-5.

<u>Corolário 1.</u> $\mathcal{P}^*$ é $\supset$-infinitamente trivializável.

<u>Demonstração</u> Como no teorema II-5, corolário 2, ou diretamente da matriz M_4 considerada pois nela a fórmula $F \supset A$, onde F é uma fórmula fixa, não é válida.

<u>Corolário 2.</u> $\mathcal{P}_1$ é $\vdash$-infinitamente trivializável e $\supset$-infinitamente trivializável.

<u>Demonstração:</u> $\mathcal{P}_1$ é subcálculo de $\mathcal{P}_1^*$.

<u>Corolário 3</u>. Em $\mathcal{P}_1^*$ (e em $\mathcal{P}_1$) se F é uma fórmula fixa, então $A \supset F$ não é válida.

<u>Demonstração:</u> Observando-se M_4 , se $v(F) = nd$, toma-se $v(A) = d$ e se $v(F) = d$ toma-se $v(A) = d$ e maior que $v(F)$. Êste corolário mostra que existem álgebras $\mathcal{P}_1^*$ que não têm maior elemento.

<u>Teorema III-8</u>. No cálculo $\mathcal{P}_1^*$ (e $\mathcal{P}_1$) o esquema $\neg_p A \supset \neg_q A$, $p<q$, não é válido.

<u>Demonstração:</u> Considera-se uma matriz $M_5 = \langle N, I, \supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \vdash \rangle$ onde as funções $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, estão definidas como em M_1 do

teorema II-6 e as funções $\wedge$ e $\vdash$ como em M do teorema II-5.

Corolário 1. $\mathcal{P}_1^*$ (e $\mathcal{P}_1$) não é decidível por matrizes finitas.

Demonstração: Análoga a do teorema II-6, corolário 1.

Corolário 2. A regra $\neg_p A \vdash \neg_q A$ não é válida em $\mathcal{P}_1^*$(e $\mathcal{P}_1$).

Demonstração: Diretamente da matriz do teorema em consideração.

IV- Hirarquias de Cálculos Proposicionais com Redução de Negações.

Nos cálculos estudados em II e III, como demonstramos, não é possível reduzir negações. Contudo, parece um problema interessante construir cálculos onde haja a possibilidade de reduzir negações sem que os cálculos sejam finitamente trivializáveis. Pois, tais cálculos se mantiverem as características dêstes que desenvolvemos em II e III, quanto as leis de absorção (8), aparentemente permitem construir teorias de conjuntos onde se contorna o paradoxo de Curry - Moh Shaw=Kwei (3), e se forem, ainda, infinitamente trivializáveis o aparecimento de outros paradoxos, como por exemplo os do tipo do de Russell, não causa problema algum.

O Prof. Mário Tourasse Teixeira sugeriu que se estudassem os cálculos das secções anteriores com o seguinte postulado a mais:

$$\neg\neg.\neg A \leftrightarrow \neg A .$$

A partir de tal sugestão, como já era preocupação sua, o Prof. N.C.A. da Costa pensou em se construir uma hierarquia de cálculos onde a possibilidade de se reduzir negações fôsse diminuindo até chegar a impossibilidade.

Estudando êste último problema construimos várias hierarquias de cálculos proposicionais satisfazendo a proposição do Prof. Costa. Algumas dessas hierarquias podem ser obtidas de seus sistemas $\mathcal{C}_n, 0<n<\omega$(5); porém, destas a unica que apresenta algum interêsse para nós é a obtida de $\mathcal{C}_\omega$, por ser êste o único cálculo infinitamente trivializável na hierarquia do Prof. Costa . Outras hierarquias são as obtidas dos cálculos estudados nas secções anteriores dêste trabalho. Os cálculos de tais hierarquias seriam obtidos, respectivamente, de $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^*$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_1^*$ pela reunião do postulado

$$17.\ \neg_{2r+3}A \leftrightarrow \neg_{2r+1}A \qquad (r=1,2,3,\ \dots\ \dots)$$

Para êstes temos resultados interessantes, pois asseguram as características desejadas à todos os cálculos da hierarquia. Faremos as demonstrações apenas para a hierarquia H_1^* , obtida com auxílio de $\mathcal{P}_1^*$ que é o último cálculo em tal hierarquia.

Teorema IV-1. Todos os cálculos da hierarquia H_1^* são $\vdash$ -infinitamente trivializáveis e $\supset$ -infinitamente trivializáveis.

Demonstração: Idêntica a do teorema III-7, e do corolário 1 do mesmo, respectivamente.

Teorema IV-2. Tôdas as fórmulas que não eram válidas em e $\mathcal{P}^*$ e cuja demonstração foi dada pelos teoremas 10 e 18 de (3), continuam não valendo em todos os cálculos da hierarquia H_1^*.

Demonstração: Idêntica a do Teorema III-4.

Teorema IV-3. Em todos os cálculos da hierarquia H_1 continuam não valendo as regras:

$A \vdash B \ , \ A \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$ e $\neg A \vdash B \ , \ \neg A \vdash \neg B \Rightarrow A$.

Demonstração: Idêntica a do teorema III-5.

Teorema IV-4. Na hierarquia H_1 cada cálculo é estritamente mais fraco que o precedente.

Demonstração: Suponhamos que p e q sejam dois números ímpares tais que p= 2r+1 e q=2r+3. A matriz M_6 que vamos construir prova que , para um p fixo ~~qualquer~~, $\neg_p A \sim \neg_q A$, porém se u e v forem números menores que p e q respectivamente, então $(\neg_u A \sim \neg_v A)$ não é válida. A demonstração vale para o esquema e para a regra. Seja, então, $M_6 = \langle N, I, \supset, \&, V, \neg, \wedge, \vdash \rangle$ onde as funções $\supset$, &, V, $\wedge$, $\vdash$ são definidas como na matriz M_1 do teorema II-6, e a negação como segue:

$v(A) = 1$ então $v(\neg A) = p+1$,

$1 < v(A) \leq p$ então $v(\neg A) = V(A)+1$,

$v(A) = p+1$, " $v(\neg A) = q$,

$v(A) = q$ " $v(\neg A) = q+1$,

$v(A) = q+1$ " $v(\neg A) = q$,

se $2n > q+1$,

$v(A) = 2n$ então $v(\neg A) = 2n+1$,

$v(A) = 2n+1$ " $v(\neg A) = 2n$.

Bibliografia.

(1) Arruda, Ayda Ignez - Álgebras não Clássicas, Seminários do Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo, 31 de outubro de 1966.

(2) " - Álgebras de Conjuntos não Clássicas, iden , 17 de outubro de 1966.

(3) Arruda, Ayda Ignez e Costa, N.C.A. da - O Paradoxo de Curry - Moh Shaw-Kwei , Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo, vol.18, Fasc, 1º e 2º, dez.1963 (1966).

(4) Bourbaki, N. - Théorie des Ensembles, I e II, 1954.

(5) Costa, N.C.A. da - Sistemas Formais Inconsistentes, tese, 1963.

(6) Costa, N.C.A. da e Guillaume, Marcel, - Sur les Calculs C_n, An. Acad. Brasileira de Ciências, vol.36, nº4 ,1964, pág. 379-382.

(7) Kleene , S. C. - Introduction to Metamathematics, Van Nostrand, 1952.

(8) Shaw-Kwei, Moh - Paradoxes in many-valued logics. - , Jounal of Symb. Logic, vol 19, 1954, pág. 37-40.

* Trabalho realizado com auxílio do Instituto de Pesquisas matemáticas da Universidade de São Paulo.