UNIVERSIDAD PERUANA CAYETANO HEREDIA
CALLE HONORIO DELGADO
KM: 3.5 PANAMERICANA NORTE (CARRETERA ANCON)
TELEF. 815772 - AP. 5045
LIMA - PERU

Lima 2 de Enero de 1975

Querido Newton:

con inexplicable retraso recibí tu carta del 9 de Noviembre del año pasado. La recibí el 31 de Diciembre y me apresuro a contestarla y, naturalmente, a agradecerla.

El error del esquema axiomático:

(1) $C \Rightarrow F(\beta).\Rightarrow.C \Rightarrow (\forall\alpha)F(\alpha)$

se debió a que, en un principio, yo mismo no comprendía bien el manejo de las letras esquemáticas "β". Ello se debe a que no se encuentra su manejo explicado en ningún texto y he tenido que analizarlo solo. Pero al hacerlo descubrí sus inmensas posibilidades. En un comienzo las había utilizado, como sucede siempre, casi por instinto. Por eso mi error garrafal del primer sistema y mi error, también grave del segundo. Pero pocos días después de mi última carta, comprendí por fin, todo lo que el manejo de estas letras significaba y me di cuenta del error que me indicas. Me di cuenta, además que, en contra de lo que piensas, la eliminación de variables, es perfectamente posible. Lo que hay que hacer, es por supuesto, introducir una regla para la cuantificación igual o equivalente a la de Bernays y Hilbert:

(2) $$\frac{\vdash C \Rightarrow F(\beta)}{\vdash C \Rightarrow (\forall\alpha)F(\alpha)}$$ (en que C no es de la forma $F(\beta)$)

En la <u>práctica</u> funciona exactamente igual a la regla cuando se usan variables libres, pero su significado es muy dferente, aunque, desde luego, ligado a aquél. Para comprender a fondo lo que significa una fórmula como $F(\beta)$ y una expresión como:

(3) $\vdash F(\beta)$

basta meditar sobre el significado de los esquemas axiomáticos de la lógica de las proposiciones cuando no se usa la regla de sustitución. Así:

(4) $A.\Rightarrow.B \Rightarrow A$

por ejemplo, no es una fórmula del sistema formal, sino que es simplemente una indicación de que, <u>cualquier fórmula del sistema formal que tenga la forma señalada es un axioma del mismo</u>.

Pues, exactamente lo mismo signifca un esquema axiomático, como por ejem:

(4) $\vdash (\forall\alpha)F(\alpha) \Rightarrow F(\beta)$

Esta esquema es una expresión metateórica si se quiere, que nos dice que cualquier fórmula del sistema formal que tenga esta forma es un axioma. Y lo mismo que sucede con los axiomas sucede con los teoremas. Una fórmula como, por ejem:

UNIVERSIDAD PERUANA CAYETANO HEREDIA
CALLE HONORIO DELGADO
KM: 3.5 PANAMERICANA NORTE (CARRETERA ANCON)
TELEF. 815772 - AP. 5045
LIMA · PERU

(5) $A \Rightarrow A$

que es un teorema de todos los sistemas proposicionales, no es un teorema sino un <u>esquema teoremático</u> que nos diee que toda fórmula del sistema formal que tenga la forma señalada, es un teorema del mismo.

Lo maravilloso del método de los esquemas es no sólo que permite eliminar lo engorroso de la regla de sustitución sino que trasforma las derivaciones formales en una especie de derivaciones metateóricas, hay una especie de desplazamiento del nivel lingüístico y, debido a ello, se logra una gran eficacia, potencia y elegancia en las derivaciones en el nivel del lenguaje objeto.

Así mismo, una expresión como esta, en el sistema LPO_3, que es el que desarrollo en mi libro:

(6) $\vdash (\forall\alpha)[F(\alpha) \Rightarrow G(\alpha)] . \Rightarrow . (\forall\alpha)F(\alpha) \Rightarrow G(\beta)$ *

no es un teorema sino una expresión que indica que toda fórmula de LPO_3 ~~wmm~~ que tiene la forma señalada por (6) es un teorema de dicho lenguaje. ~~Parxwxlkagarxwx(6)xxxwhxwxwxwx~~ O sea:

(7) $\vdash (\forall\alpha)[F(\alpha) \Rightarrow G(\alpha)] . \Rightarrow . (\forall\alpha)F(\alpha) \Rightarrow G(a)$

$\vdash (\forall\alpha)[F(\alpha) \Rightarrow G(\alpha)] . \Rightarrow . (\forall\alpha)F(\alpha) \Rightarrow G(b)$

....

son teoremas de LPO_3. Como, en ~~wlwxwx~~ la lógica de las proposiciones, para llegar a (6) no es necesario demostrar las fórmulas de (7) una por una. Nuestras convenciones sobre el manejo de las letras esquemáticas y de los esquemas, permite llegar a (6) en un número finito de pasos y en número mucho menor que si se utilizan variables y una regla de sustitución (o variancia alfabética).

Esta es la razón ~~pxw~~ por la cual la regla (2) es válida, porque:

(8) $\vdash C \Rightarrow F(\beta)$

señala que se ha demostrado la infinidad de fórmulas:

(9) $\vdash C \Rightarrow F(a)$

$\vdash C \Rightarrow F(b)$

....

....

De manera que el esquema:

(10') $\vdash C \Rightarrow (\forall\alpha)F(\alpha)$

~~wxwmxw~~, cuando se especifica "la letra esquemática "F" por un predicado de LPO_3 resulta un verdadero teorema, una fórmula demostrada de LPO_3.

Fíjate que, en esencia, se trata del mismo argumento que

*) "α" es una letra esquemática que se especifica por variables, x, y, ...
"β" se especifica por constantes individuales, a, b, c, ...

~~uxuxuxu~~ se utiliza para justtificar semánticamente una fórmula como:

(11) $\vdash F(\alpha)$

y para justiticar la regla:

(12) $\dfrac{\vdash C \Rightarrow F(x)}{\vdash C \Rightarrow (\forall x)F(x)}$ (con el proviso de que "x" no está libre en C)

Esta justificación se encuentra, por ejem, en la págs 102,103 de los Grundlagen(Julius Springer, Berlin,1934,I Tomo). Pero en el caso de las variables libres, es una justificación a posteriori,que no se refleja en la regla.En cambio en la regla (2),la regla sintáctica refleja directamente el fundamento semántico.Y es,por eso,mucho más intuitivo,pues el último fundamento de la sintaxis es la semántica.De otra manera, las fórmulas no significan nada y no sirven para nada.

Cuando utilizas una fórmula como (1a) y dices que es verdadera, tienes que hacer una generalización artificiosa del concepto de verdad,en cambio cuando utilizar una expresión como:

(13) $\vdash F(\beta)$

te mantienes dentro de los marcos más estrictamente intuitivos, pues (13) es:

(14) $\vdash F(a)$
$\vdash F(b)$
....
....

y la verdad de F(a), F(b), ...se determina mediante una interpretación adecuada y directa asociando los predicados con atributos y las constantes individuales con elementos del universo de interpretación. Todas no son pues, sino ventajas.Al principio,el método parece un poco raro porque debido al uso empedernido de variables libres que hacemos todos los que nos dedicamos a cuestiones de lógica y de matemáticas, tenemos ya una <u>intuición</u> del significado de fórmulas como F(x), F(y),etc, que se deriva de la mera costumbre.En cambio,una vez que nos reacostumbramos, nuestras intuiciones corresponden a estructuras racionales muy profundas.

La utilización de parámetros me parece superflua.Como muy bien dices, su función se realiza, en la práctica por las propias variables.En efecto,una expresión como:

(15) F(a)

en que "a" no es ni una variable ~~xxxxxxxx~~ individual ni una constante individual sino un parámetro(por ejem, como las que utiliza Smullyan en su First Order Logic), si no es algo como $F(\beta)$ no es nada.~~xxxxxx~~ Pero la diferencia es que "a" pertenece al lenguaje objeto mientras que "β" es un mero símbolo auxiliar que no es tampoco una variable sintáctica sino una letra esquemática, una "dummy variable" como la llama Quine(*)

Creo pues,haber resuelto el problema a satisfacción:he construído un lenguaje formal de primer orden en el que no se utilizan variables libres y que es equivalente a las lógicas clásicas de primer orden(o sea, se pueden derivar todas las fórmulas cuantificadas o cerradas no cuantificadas que se pueden derivar en estas últimas,que son las únicas que se necesitan para el análisis de la deducción matemática). No te envié aún los teoremas ni todo lo que he hecho(por ejem la demostración del teorema de la deducción,etc) porque~~xxx~~, debido a mi error inicial he tenido que rehacer muchas páginas.Pero dentro de unos diez o doce días te envío todo el material.

Pero hay más, ~~xxxxx~~.mucho más.Porque, como dice Kant, la razón es la facultad de lo incondicionado y una vez que se pone en marcha ya no puede parar. Y unavez elimibadas las ~~xxxxxxxxxxxxxx~~ variables libres, basta dar un pequeño paso para eliminar también las variables ligadas y salir ,así, definitivamente de las variables que no son,después de todo sino "huecos" o "blanks" en el papel para poder manejar las fórmulas. En efecto, en lugar ~~del cuantificador "~~ "

(*) A propósito: el propio Quine considera los parámetros como variables no individuales (i.e. variables explained away)

UNIVERSIDAD PERUANA CAYETANO HEREDIA
CALLE HONORIO DELGADO
KM: 3.5 PANAMERICANA NORTE (CARRETERA ANCON)
TELEF. 815772 - AP. 5045
LIMA - PERU

de $(\forall x)F(x)$ o, más generalmente, $(\forall\alpha)F(\alpha)$, se pone, sencillamente:

(16) $\forall F$

o mejor aún:

(17) TF

Cuando se interpreta el ~~l~~enguaje, TF significa, sencillamente: todo el~~e~~mento~~s~~ (del universo de interpretación) tiene la propiedad denotada por F. El axioma EA_4 de LPO_3:

(17) $(\forall\alpha)F(\alpha) \Rightarrow F(\beta)$

se trasforma en:

(18) $TF \Rightarrow F(\beta)$

Y la regla (2), en:

(19) $\dfrac{C \Rightarrow F(\beta)}{C \Rightarrow TF}$

y se acabó. Todo lo demás sale como por un tubo. Es, como dicen los brasileños cuando se entusiasman "uma coisa louca", sale lindo. Por ejem, en lugar de definir $(\exists\alpha)F(\alpha)$ como:

(20) $(\exists\alpha)F(\alpha) . \Leftrightarrow . \sim(\forall\alpha)\sim F(\alpha)$

se pone:

(21) $AF . \Leftrightarrow . \sim T\sim F$ (*)

y todo resulta más simple. Observa, como algo interesante, que la eliminación de variables que se logra de esta manera no tiene nada que ver con la lógica combinatoria (ya sea estilo Curry, Combinatory Logic, o Quine, Variables explained away, de sus Selected Logic Papers). El análisis no se basa en la creación de predicados que incluyan el cuantificador, puesto que el cuantificador sigue explicitado. Lo único que sucede es que si ya no hay variables libres, ¿para qué va a haber variables ligadas? Una expresión como $(\forall x)F(x)$ no es sino una manera de analizar la expresión "todo x es F". Pero "todo x es F" no es a su vez, sino una manera de analizar una expresión concreta como: "todos los miembros del dominio D son F". Y este análisis puede hacerse, siempre que se establezcan reglas semánticas que permitan interpretar TF debidamente y que, por supuesto, las expresiones $F(a), F(b), \ldots$ y TF se relacionen tanto sintáctica como semánticamente.-

Te rogaría que me contestaras lo más ~~xxxxx~~ rápido posible, pues antes de enviarte el material definitivo quisiera ver

(*) Cuando hay varios cuantificadores, simplemente se les pone subíndices.- Así: $(\forall x)(\forall y)F(x,y)$, ~~es~~ es $T_1T_2F^2$, $(\forall x)(\exists y)F(x,y)$ es TAF, etc.

UNIVERSIDAD PERUANA CAYETANO HEREDIA
CALLE HONORIO DELGADO
KM: 3.5 PANAMERICANA NORTE (CARRETERA ANCON)
TELEF. 815772 - AP. 5045
LIMA - PERU

si estás de acuerdo con lo que te acabo de exponer. Estoy convencido que esta vez he a certado, pero tu gran experiencia y agudeza me pueden aún obligar a aclarar ciertos puntos.

No quiero despedirme sin desearte muy feliz y próspero año nuevo, a tí, a su simpática esposa y a tus hijos. Con un abrazo muy cordial

F. Miró Quesada

P.S. El número del apartado es, efectivamente 5045 (lo que pasa es que soy muy distraído, como buen filósofo).

Sobre mi libro, Humanismo y revolución, creo haberte dicho que se va a hacer una nueva edición "corregida y aumentada" en Caracas en una nueva colección que edita la Casa de la Cultura de Venezuela (INCIBA), titulada "Nuestra América". En cuanto al trabajo de tu alumno (perdona la demora en responderte sobre este punto, pero releyendo tus cartas lo he visto y me había olvidado por completo) es una tesis de Luiz Paulo de Alcántara y otro de Lafayette de Moraes (sobre la lógica de Jaskowski). No creo que ninguno de ellos tenga nada que ver con Crítica. Sería una lástima que se hubiera perdido. En todo caso te rogaría que me enviaras una copia para enviarla a Crítica. También he recibido tu lindo trabajo sobre sistemas formales inconsistentes. Me ha sido muy útil y lo cito en mi libro. Acabo también de recibir nuevos trabajos tuyos que aún no he tenido tiempo de leer. Pero lo haré pronto.

Otro P.S. Me acabo de dar cuenta que mi sistema ya no puede llamarse de primer orden ~~puesto~~ puesto que no se cuantifican variables individuales. Habría que buscarle un nombre. ¿Qué te parece: lógica de la cuantificación elemental?