INSTITUTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO PARANÁ

Sôbre a Teoria dos Tipos

1- Introdução.

A finalidade do presente trabalho é a construção de un sistema de teoria dos tipos que denominaremos $\mathcal{P}_1$, análogo ao de Gödel (1), mas no qual figuram variáveis específicas sem tipo. $\mathcal{P}_1$ é inconsistente, embora aparentemente não seja trivial, isto é, há fórmulas de $\mathcal{P}_1$ que não são teoremas(2) .

O cálculo proposicional da lógica subjacente a $\mathcal{P}_1$ é o cálculo $\mathcal{C}_1$ (3), apto para servir de base para sistemas formais inconsistentes não triviais. De modo semelhante à construção de $\mathcal{P}_1$, poder-se-ia edificar uma hierarquia de sistemas tendo por base os cálculos $\mathcal{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$ (4).

Denotando-se por $\mathcal{P}_0$ o sistema de Gödel convenientemente modificado, de modo que os indivíduos sejam objetos quaisquer e não apenas números naturais, $\mathcal{P}_0$ acha-se contido em $\mathcal{P}_1$, num certo sentido que será precisado adiamte. Isto significa que, pràticamente, tôda a matemática usual pode ser desenvolvida em $\mathcal{P}_1$.

Exprimindo-nos sem rigor podemos dizer que $\mathcal{P}_1$ é obtido de $\mathcal{P}_0$ mediante as seguintes modificações principais; 1) a lógica subjacente é enfraquecida, de modo que a existência de contradição não trivialize o sistema obtido; 2) o esquema da separação é fortalecido, permitindo-nos provar a existência de conjuntos que não existem na teoria usual , 3) além das variáveis com tipo utilizamos variáveis sem tipo.

Convém observar que a justificação da introdução de "objetos sem tipo", em oposição aos"objetos com tipo", é mais ou menos análoga à que Hilbert dava para a consideração de elementos ideais em matemática, que se introduzem para uniformizar certas questões. Mediante tal artifício , podemos tratar de certos "conjuntos patológicos" e determinados problemas que até o momento foram deixados de lado pelas teorias tradicionais.

Para que o sistema $\mathcal{P}_1$ não seja trivial são necessárias determinadas restrições na formulação da noção de fórmula. Formalmente há dois tipos de retrições: 1) as restrições provenientes da própria teoria dos tipos clássica segundo a qual uma expressão da forma $\alpha \in \beta$ só pode ser uma fórmula se o tipo de β fôr uma unidade superior ao de α ; isto significa intuitivamente que um conjunto de tipo n+1 só pode ser composto por elementos de tipo n ; 2) mesmo empregando-se variáveis sem tipo, uma expressão como $\alpha \in \beta$ só poderá ser fórmula no caso em que ambas são variáveis sem tipo ou no caso em que α possui tipo e β não. Sob o ponto de vista ingênuo significado desta restrição é mais ou menos o seguinte : as variáveis sem tipo sem tipo referem-se a objetos quaisquer, mas mediante determinadas restrições como, por exemplo, a de que não se pode afirmar de um objeto de tipo n que êle possui ou não um elemento de tipo diferente de n-1 ou sem tipo. Noutras palavras, de um objeto de tipo fixo carece de sentido afirmar ou negar que possui um elemento que não seja de tipo imedietamente inferior ao seu.

A terminologia, as notações, etc são as dos trabalhos citados na bibliografia com adaptações evidentes. As demonstrações que não oferecerem dificuldade serão, em geral, omitidas.

2- Descrição do Sistema $\mathcal{P}_1$.

Na metalinguagem utilizaremos letras latinas maiúsculas e letras gregas minúsculas para denotar expressões formais, isto é, sequências finitas de símbolos, inclusive a sequência vazia. As letras gregas maiúsculas denotarão seqüências finitas de expressões formais.

2.1) Símbolos primitivos de $\mathcal{P}_1$.

Os símbolos primitivos de $\mathcal{P}_1$ são os seguintes:

a) Símbolos lógicos: $\supset$ (implicação), & (conjunção), $\vee$(disjunção), $\neg$ (negação), $\forall$ (quantificador universal) e $\exists$ (quantificador existencial).

b) Variáveis: b_0) variáveis sem tipo: $t, u, v, x, y, z, t', u', v'$ ... ; b_1) variáveis de tipo um ou individuais: t_1, v_1, u_1, x_1, y_1, z_1, t_1', u_1', v_1' ... ; b_2) variáveis de tipo dois : t_2, u_2, v_2, x_2, y_2, z_2, t_2', u_2', v_2', ... ; etc (De cada tipo há $\aleph_0$ variáveis e há $\aleph_0$ tipos.)

c) Símbolo específico: $\in$ (pertinência).

d) Símbolos auxiliares; (,) (parêntesis).

2.2) Definição de Fórmula.

Daqui para frente as letras m, n e p representarão índices inteiros e positivos. Uma expressão metalinguística como, por exemplo, α_n , denotará uma variável de tipo n.

a) Se α e β forem variáveis tais que: 1) ambas têm tipo e o tipo de α é uma unidade inferior ao de β ; 2) α tem tipo e β não ou 3) ambas não têm tipo, então é fórmula a seguinte expressão: $(\alpha \in \beta)$;

b) Se A e B forem fórmulas então $(A \supset B)$, $(A \,\&\, B)$, $(A \vee B)$ e $(\neg A)$ também o são;

c) Se A é uma fórmula e α uma variável, então $\forall\alpha A$ e $\exists\alpha A$ são fórmulas;

d) As únicas fórmulas são as expressões dadas por a)-c).

No que segue, ao escrevermos uma fórmula faremos várias simplificações, como, por exemplo, a supressão de parêntesis, de acôrdo com Kleene [ ], bem como serão utilizadas suas convenções metamateméticas.

As noções de variável livre, de variável ligada , de variável livre para outra variável numa fórmula, etc , definem-se como é usual.

2.3) Postulados de $\mathcal{P}_1$.

A seguir formularemos os postulados de $\mathcal{P}_1$, demonstrando alguns teoremas preliminares e introduzindo algumas definições básicas. O desenvolvimento completo do sistema será feito na secção 3.

I) Postulados do cálculo proposicional.

Se A, B e C são fórmulas e A^o abrevia $\neg(A \,\&\, \neg A)$ então os postulados do cálculo proposicional são os seguintes:

I.1) $A \supset (B \supset A)$ I.2) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

I.3) $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$ I.4) $A \,\&\, B \supset A$ I.5) $A \,\&\, B \supset B$

I.6) $A \supset (B \supset A \,\&\, B)$ I.7) $A \supset A \vee B$ I.8) $B \supset A \vee B$

I.9) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)$ I.10) $\neg\neg A \supset A$

I.11) $A \vee \neg A$ I.12) $B^o \supset ((A \supset B) \supset (A \supset \neg B) \supset \neg A))$

I.13) $A^o \supset (\neg A)^o$ I.14) $A^o \,\&\, B^o \supset (A \supset B)^o$

1.15) $A^o \,\&\, B^o \supset (A \,\&\, B)^o$ 1.16) $A^o \,\&\, B^o \supset (A \vee B)^o$

II) Postulados do cálculo quantificacional.

Daqui para frente as letras gregas minúsculas sem índices representarão variáveis sem tipo e as letras gregas minúsculas afetadas de índices representarão variáveis de tipo correspondente ao índice.

Seja $A(\alpha)$ uma fórmula, β uma variável livre para α em $A(\alpha)$ e $A(\beta)$ uma fórmula; se α é de tipo n , β deve ser do mesmo tipo, então os seguintes esquemas são postulados de $\mathcal{P}_1$:

II.1) $\forall\alpha A(\alpha) \supset A(\beta)$ II.2) $A(\beta) \supset \exists\alpha A(\alpha)$.

Seja C uma fórmula que não contém a variável α livre e $A(\alpha)$ uma fórmula, então as seguintes regras são postulados de $\mathcal{P}_1$:

II.3) $\dfrac{A(\alpha) \supset C}{\exists\alpha A(\alpha) \supset C}$ II.4) $\dfrac{C \supset A(\alpha)}{C \supset \forall\alpha A(\alpha)}$

Se $A(\alpha)$ é uma fórmula os seguintes esquemas são postulados de $\mathcal{P}_1$:

II.5) $\forall\alpha(A(\alpha))^o \supset (\forall\alpha\, A(\alpha))^o$ II.6) $\forall\alpha(A(\alpha))^o \supset (\exists\alpha\, A(\alpha))^o$.

Se A e B forem duas fórmulas congruentes no sentido de Kleene [ ], de modo que as ocorrências correspondentes das variávies ligadas sejam do mesmo tipo ou não possuam tipo, ou se B é obtida de A pela supressão de quantificadores vácuos, então é postulado o esquema:

II.7) $A \sim B$.

Convém observar ainda que as noções de dedução, demonstração, etc. bem como a simbologia correspondente são as de Kleene [ ]. Isto posto , os teoremas que seguem são consequências imeditas dos postulados.

Teorema 1. São válidos os teoremas de Costa [ ] e [ ] , levando -se em conta as restrições de tipo.

III) <u>Postulados específicos de $\mathcal{P}_1$</u>.

<u>Definição 1.</u> Se α, β e γ forem variáveis sem tipo e se γ for distinto de α e β, têm-se:

$$\alpha = \beta \quad =_{def} \quad \forall \gamma(\alpha \in \gamma \sim \beta \in \gamma).$$

<u>Definição 2</u>. Diz-se que uma fórmula F satisfaz as condições de tipo se as suas variáveis forem tôdas variáveis com tipo e qualquer fórmula atômica de F é da forma $\alpha_n \in \beta_{n+1}$.

<u>Definição 3</u>. Uma fórmula F diz-se normal como em Costa [ ]. Notando-se que ao se atribuir índices às variáveis que figuram em F, o índice atribuído a uma variável com tipo não precisa coincidir com o tipo dessa variável.

A seguir formularemos os postulados específicos de $\mathcal{P}_1$:

III.1) $\forall \gamma_{n+1}(\alpha_n \in \gamma_{n+1} \sim \beta_n \in \gamma_{n+1}) \supset \alpha_n = \beta_n$,

III.2) $\forall \gamma(\gamma \in \alpha \sim \gamma \in \beta) \supset \alpha = \beta$,

III.3) $\forall \gamma_n(\gamma_n \in \alpha_{n+1} \sim \gamma_n \in \beta_{n+1}) \supset \alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$,

III.4) $\exists \alpha \forall \beta(\beta \in \alpha \sim F(\beta))$, se $F(\beta)$ fôr normal,

III.5) $\exists \alpha_{n+1} \forall \beta_n(\beta_n \in \alpha_{n+1} \sim F(\beta_n))$, se $F(\beta_n)$ satisfizer as condições de tipo,

III.5)

III.6)

III.7) $\forall \alpha \forall \gamma (\alpha = \gamma \supset (F(\alpha) \sim F(\gamma)))$

III.8) $(\alpha_n \in \beta_{n+1})^0$

Os teoremas seguintes são consequências imediatas da definição 1 e do teorema 1.

<u>Teorema 2</u>. $\alpha_n = \beta_n \sim \forall \gamma_{n+1}(\alpha_n \in \gamma_{n+1} \sim \beta_n \in \gamma_{n+1})$.

<u>Teorema 3</u>. $\vdash \forall x(x = x)$, $\quad \vdash x = y \sim y = x$.

<u>Teorema 4</u>. $\vdash \forall \alpha_n(\alpha_n = \alpha_n)$ $\quad \vdash \alpha_n = \beta_n \sim \beta_n = \alpha_n$.

<u>Teorema 5</u> $\forall \alpha_n \forall \beta_n (\alpha_n = \beta_n \supset (F(\alpha_n) \sim F(\beta_n))$

<u>Demonstração</u>:

1. $\forall \alpha \forall \beta (\alpha = \beta \supset (F(\alpha) \sim F(\beta)) \vdash \alpha_n = \beta_n \supset (F(\alpha_n) \sim F(\beta_n))$ cond eq.
2. $\alpha_n = \beta_n \supset (F(\alpha_n) \sim F(\beta_n)) \vdash \forall \alpha_n \forall \beta_n (\alpha_n = \beta_n \supset (F(\alpha_n) \sim F((\beta_n))$
3. $\forall \alpha_n \forall \beta_n (\alpha_n = \beta_n \supset (F(\alpha_n) \sim F(\beta_n)))$

Teorema 5

$$\alpha_n = \beta_n \equiv \forall \gamma (\alpha_n \in \gamma \equiv \beta_n \in \gamma)$$

Teorema 6

$$\forall \gamma (\alpha_n \in \gamma \equiv \beta_n \in \gamma) \equiv \forall \gamma_{n+1} (\alpha_n \in \gamma_{n+1} \equiv \beta_n \in \gamma_{n+1})$$

Definição 4

a) se α, β, γ e δ são variáveis, $F(\beta)$ uma fórmula 1-normal, γ não figura livre em $F(\beta)$ e $F(\delta)$ é uma fórmula obtida de $F(\beta)$ pela substituição de β por δ e (ainda $F(\delta)$ é 1-normal) δ não ? figura livre em $F(\beta)$) então:

$$\alpha \in \hat{\beta} F(\beta) =_{def} \exists \gamma (\alpha \in \gamma \,\&\, \forall \delta (\delta \in \gamma \equiv F(\delta)))$$

$$\hat{\beta} F(\beta) \in \alpha =_{def} \exists \gamma (\gamma \in \alpha \,\&\, \forall \delta (\delta \in \gamma \equiv F(\delta)))$$

$$\hat{\alpha} F(\alpha) \in \hat{\beta} F(\beta) =_{def}.$$

b) se α_n, β_n, γ_{n+1}, γ_{n+2}, δ_n são variáveis e $F(\beta_n)$ é uma fórmula que satisfaz as condições de tipo, $F(\delta_n)$ é obtida de $F(\beta_n)$ pela substituição de β_n por δ_n, e ? γ_{n+1} não ? figura ? livre ? em ? $F(\beta_n)$ (idem p/ γ_{n+2}) então:

$$\alpha_n \in \hat{\beta}_n F(\beta_n) =_{def} \exists \gamma_{n+1} (\alpha_n \in \gamma_{n+1} \,\&\, \forall \delta_n (\delta_n \in \gamma_{n+1} \equiv F(\delta_n)))$$

$$\hat{\beta}_n F(\beta_n) \in \alpha_{n+2} =_{def} \exists \gamma_{n+1} (\gamma_{n+1} \in \alpha_{n+2} \,\&\, \forall \delta_n (\delta_n \in \gamma_{n+1} \equiv F(\delta_n)))$$

$$\hat{\alpha}(F(\alpha_n)) \in \hat{\beta}(G(\beta_n)) =_{def}.$$

Teorema 7. nas condições da definição 4 temos

$$\hat{\alpha} F(\alpha) \in \hat{\beta} G(\beta) \equiv \exists \gamma \exists \lambda (\gamma \in \lambda \,\&\, \forall \delta (\delta \in \gamma \equiv F(\delta)) \,\&\, \forall \theta (\theta \in \lambda \equiv G(\theta)))$$

$$\hat{\alpha}_n F(\alpha_n) \in \hat{\beta}_{n+1} G(\beta_{n+1}) \equiv \exists \gamma_{n+1} \exists \lambda_{n+2} [\gamma_{n+1} \in \lambda_{n+2} \,\&\, \forall \delta_n (\delta_n \in \gamma_{n+1} \equiv F(\delta_n)) \,\&\, \forall \theta_{n+1} (\theta_{n+1} \in \lambda_{n+2} \equiv G(\theta_{n+1}))]$$

Postulado

III. 7 $\forall \alpha \forall \gamma (\alpha = \gamma \supset (F(\alpha) \equiv F(\gamma)))$

Teorema $\alpha_n = \gamma_n \supset (F(\alpha_n) \equiv F(\gamma_n))$

Teorema 8 se $F(\alpha)$ é 1-normal então

$\vdash \beta \in \hat{\alpha} F(\alpha) \equiv F(\beta)$

Demonstração

1. $\beta \in \hat{\alpha} F(\alpha) \equiv \exists \lambda (\beta \in \lambda \ \& \ \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta)))$
2. $\beta \in \lambda \ \& \ \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta)) \vdash \beta \in \lambda, \beta \in \lambda \equiv F(\beta)$
3. $\quad$ " $\quad \vdash F(\beta)$
4. $\exists \lambda (\beta \in \lambda \ \& \ \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta))) \supset F(\beta)$
5. $\exists \alpha \forall \delta (\delta \in \alpha \equiv F(\delta)))$ postulado
6. $\forall \delta (\delta \in \beta \equiv F(\delta))$
7. $F(\beta), \forall \delta (\delta \in \beta \equiv F(\delta)) \vdash \delta \in \beta \ \& \ \forall \delta (\delta \in \beta \equiv F(\delta))$
8. $F(\beta), \forall \delta (\delta \in \beta \equiv F(\delta)) \vdash \exists \lambda (\beta \in \lambda \ \& \ \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta)))$
9. $F(\beta), \exists \beta \forall \delta (\delta \in \beta \equiv F(\delta)) \vdash \exists \lambda (\beta \in \lambda \ \& \ \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta)))$
10. $F(\beta) \supset \exists \lambda (\beta \in \lambda \ \& \ \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta)))$
11. $\exists \lambda (\delta \in \lambda \ \& \ \forall$

Teorema 8 se $F(\alpha)$ e $F(\beta)$ for 1-normal então, nas cond. def 9;

$\vdash \beta \in \hat{\alpha} F(\alpha) \equiv F(\beta)$

Demonstração

1. $\beta \in \hat{\alpha} F(\alpha) \equiv \exists \lambda (\beta \in \lambda \,\&\, \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta)))$
2. $\beta \in \lambda, \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta)) \vdash \beta \in \lambda,\ \beta \in \lambda \equiv F(\beta)$
3. $\quad$ " $\quad \vdash F(\beta)$
4. $\exists \lambda (\beta \in \lambda \,\&\, \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta))) \supset F(\beta)$
5. $F(\beta), \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta)) \vdash F(\beta),\ \beta \in \lambda \equiv F(\beta)$ $\quad F(\delta)$ 1-normal
6. $\quad$ " $\quad \vdash \beta \in \lambda$
7. $\quad$ " $\quad \vdash \beta \in \lambda \,\&\, \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta))$
8. $\quad$ " $\quad \vdash \exists \lambda (\beta \in \lambda \,\&\, \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta)))$
9. $F(\beta), \exists \lambda \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta)) \vdash$ $\quad$ "
10. $F(\beta) \supset \exists \lambda (\beta \in \lambda \,\&\, \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta)))$
11. $\exists \lambda (\beta \in \lambda \,\&\, \forall \delta (\delta \in \lambda \equiv F(\delta))) \equiv F(\beta)$ de 4 e 10.
12. $\beta \in \hat{\alpha} F(\alpha) \equiv F(\beta)$ $\quad$ de 1 e 11.

Teorema 9 como no teorema anterior se $F(\alpha_n)$ satisfizer as condições de tipo então: $\vdash \beta_n \in \hat{\alpha}_n F(\alpha_n) \equiv F(\beta_n)$.

? Teorema 10 se existe $\hat{\beta} F(\beta)$ (isto é se $F(\beta)$ for 1-normal) então $\vdash \forall \alpha\, A(\alpha) \supset A(\hat{\beta} F(\beta))$ e $\vdash A(\hat{\beta} F(\beta)) \supset \exists \alpha\, A(\alpha)$

Demonstração.