\- 1º ENCONTRO BRASILEIRO DE LÓGICA -

LA MÉTHODE DES VALIDATIONS EN LOGIQUE PROPOSITIONNELLE MODALE.

ANDRÉA LOPARIĆ - 1977

SUR LA MÉTHODE DES VALIDATIONS EN LOGIQUE PROPOSITIONNELE MODALE

Dans ce travail nous présentons une méthode de décision pour le calcul propositionnel K de Kripke basé sur une définition de validation pour les formules de K par rapport à laquelle des théorèmes de correction et de complétude sont demontrés. Le resultat paraît significatif dans la mesure où certaines notions kripkeennes ne sont pas pressuposées : celle d'une pluralité d'univers, chacun contenant plusieurs mondes, et celle d'une relation d'accessibilité reliant les mondes d'un même univers. Dans la partie finale nous indiquons brièvement comment ces résultats peuvent être adaptés à d'autres calculs modaux.

1) PRÉLIMINAIRES.

1.1) CONVENTIONS MÉTA-MATHÉMATIQUES. Nous employerons des majuscules latines comme variables syntaxiques pour des formules, σ pour des suites de formules; les autres majuscules grecques pour des ensembles de formules. Nous nous permettons d'employer ces variables syntaxiques avec des indexes. L'ensemble de toutes les formules sera noté par $\mathcal{F}$.

1.2) GÉNÉRALITÉS SUR K. Rappelons que le calcul K peut être ainsi présenté : 1) A, si A est une tautologie classique; 2) $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; 3) $A \,/\, \Box A$; 4) $A, A \supset B \,/\, B$. Pour simplifier, considérons alors $\{\neg, \supset, \Box\}$ comme l'ensemble des connectifs primitifs de K. Il est bien connu aussi que K a un théorème de la deduction: $\Gamma, A \vdash B$ si et seulement si $\Gamma \vdash A \supset B$, si on définit la relation de deductibilité avec les restrictions habituelles concernant la règle de Gödel (1).

En plus, il est aussi évident que les postulats 2 et 3 ci-dessus peuvent être substitués par la règle
R: $\Gamma \vdash A \;/\; \Box\Gamma \vdash \Box A$, où $\Box\Gamma = \{C : C = \Box B \text{ et } B \in \Gamma\}$.

2) SÉMI-VALIDATIONS ET VALIDATIONS POUR K.

2.1 - Définition : B est une sous-formule de A si :
a) $B = A$; b) $A_1 \wedge A_2$ est une sous-formule de A et $B = A_1$ ou $B = A_2$; c) $\neg A_1$ est une sous-formule de A et $B = A_1$; d) $\Box A_1$ est une sous-formule de A et $B = A_1$.

2.2 - Définition : $A_1, \dots, A_n$ est une Σ-séquence si, pour toute B qui est une sous-formule de A_i, $1 \leq i \leq n$, il y a un $j \leq i$ tel que $B = A_j$

2.3 - Définition : Une semi-validation est une fonction s de $\mathcal{F}$ dans $\{0, 1\}$ telle que :
1) $s(\neg A) = 1$ si et seulement si $s(A) = 0$.
2) $s(A \supset B) = 1$ si et seulement si $s(A) = 0$ ou $s(B) = 1$.

2.4 - Définition : v est une $(A_1, \dots, A_n)$ validation si $A_1, \dots, A_n$ est une Σ-séquence et :
1) si $n = 1$, v est une semi-validation
2) si $n > 1$, v est une $(A_1, \dots, A_{n-1})$ validation telle que si $A_n = \Box A_i$, les conditions I, II ci-dessous sont respectées :
I) si $v(A_n) = 0$, alors il existe une $(A_1, \dots, A_{n-1})$ validation v' telle que : a) $v'(A_i) = 0$; b) pour toute A_j, $j < n$, si $A_j = \Box A_k$ et $v(A_j) = 1$, alors $v'(A_k) = 1$
II) si $v(A_n) = 1$, alors, pour chaque $p < n$ tel que $A_p = \Box A_q$ et $v(A_p) = 0$ il y a une $(A_1, \dots, A_{n-1})$ validation v' telle que :
a) $v'(A_i) = 1$ et $v'(A_q) = 0$; b) pour toute A_j, $j < n$, si $A_j = \Box A_k$ et $v(A_j) = 1$, alors $v'(A_k) = 1$.

2.5. *Définition* : v est une validation si, pour toute Σ-sequence σ, v est une (σ) validation.

3 - PROPRIÉTÉS DES (σ) VALIDATIONS

Soit $A_1, .., A_n$ une Σ-sequence

3.1. Si v est une semi-validation et pour $1 \leq i < j \leq n$, $A_j \neq \Box A_i$, alors v est une $(A_1, .., A_n)$ validation

3.2. Pour tout $i \leq n$, si v est une semi-validation et une $(A_1, .., A_i)$ validation et si pour $i < j \leq n$, A_n n'est pas de la forme $\Box B$, alors v est une validation

3.3 - Si v est une $(A_1, .., A_n)$ validation, pour tout $p \leq n$, tout $q < p$, si $A_p = \Box A_q$ et $v(A_p) = 0$, alors il y a une $(A_1, .., A_n)$ validation v' telle que $v'(A_q) = 0$ et, pour tout $i \leq n$, tout $j < i$, si $A_i = \Box A_j$ et $v(A_i) = 1$ alors $v(A_j) = 1$.

Démonstration : par induction en n

3.4 - Soit v une semi-validation et supposons que, pour tout $p \leq n$, tout $q < p$, si $A_p = \Box A_q$ et $v(A_p) = 0$, alors il y a une $(A_1, .., A_n)$ validation v' telle que $v'(A_q) = 0$ et, pour tout $i \leq n$, tout $j < i$, si $A_i = \Box A_j$ et $v(A_i) = 1$ alors $v(A_j) = 1$; dans ce cas, v est une $(A_1, .., A_n)$ validation

Démonstration : par induction en n.

3.5 - *Définition* : Si v est une $(A_1, .., A_{n-1})$ validation, v' est l'extension normale de v à $A_1, .., A_n$ si :

1) A_n n'est pas de la forme $\Box A_i$ et pour toute B, $v'(B) = v(B)$;

2) A_n est de la forme $\Box A_i$ et : a) pour toute A si A_n n'est

pas une sous-formule de A, $v'(A) = v(A)$; b) pour toute A, si A_n est une sous-formule de A,
I) si $A = A_n$ alors $v'(A) = 0$ si et seulement si il y a une $(A_1, .., A_{n-1})$ validation $\bar{v}$ telle que $\bar{v}(A_i) = 0$ et, pour tout j, si $A_j = \Box A_k$ et $v'(A_j) = 1$ alors $\bar{v}(A_k) = 1$.
II) si $A = \neg B$, $v'(A) \neq v'(B)$; III) si $A = B \supset C$, $v'(A) = 1$ si et seulement si $v'(A) = 0$ ou $v'(B) = 1$; IV) si $A = \Box B$ et $B \neq A_i$, $v'(A) = v(A)$.

3.6. Si v est une $(A_1, .., A_{n-1})$ validation et v' est l'extension normale de v à $A_1, .., A_n$, v' est une semi-validation.

3.7. Si v est une $(A_1, .., A_{n-1})$ validation et v' est l'extension normale de v à $A_1, .., A_n$, v' est une validation.
<u>Démonstration</u> : Si A_n n'est pas de la forme $\Box A_i$ la proposition est triviale. Si $A_n = \Box A_i$ nous avons deux cas.
a) $v(A_n) = 0$; dans ce cas la condition 2bI de 3.5 est réalisée, ce qui garantit que la condition 2I de 2.4 soit satisfaite.
b) $v(A_n) = 1$; soit $\mathcal{E}(\Gamma)^u_v = \{A : \Box A \in \Gamma$ et $v(\Box A) = u\}$.
Dans ce cas, $\mathcal{E}(\{A_1, .., A_n\})^0_{v'} = \mathcal{E}(\{A_1, .., A_{n-1}\})^0_v = \mathcal{E}(\{A_1, .., A_{n-1}\})^0_{v'}$.
Puisque v est une $(A_1, .., A_{n-1})$ validation il est clair que v' est une $(A_1, .., A_{n-1})$ validation et il suit de 3.3 que pour toute $A_q \in \mathcal{E}(\{A_1, .., A_n\})^0_{v'}$ il y a une v' telle que pour toute $A_k \in \mathcal{E}(\{A_1, .., A_{n-1}\})^1_{v'}$, $v'(A_k) = 1$ et $v'(A_q) = 0$; mais comme $v(A_n) = 1$ il suit de la condition 2bI de 3.5 que chacune de ces v' est telle que $v'(A_i) = 1$, ce qui garantit que la condition 2II de 2.4 est satisfaite.

3.8. <u>Définition</u> : Si v est une $(A_1, .., A_i)$ validation, si $n - i = j$ et $v_0, v_1, .., v_j$ sont telles que $v_0 = v$ et pour chaque k, $1 \leq k \leq j$, v_k est l'extension normale de v_{k-1} à $A_1, .., A_i, .., A_{i+k}$, alors v_j est l'extension normale de v à $A_1, .., A_n$.

3.9 - Si v est une $(A_1, \ldots, A_i)$ validation, $1 \leq i < n$ et v' est l'extension normale de v à $A_1, \ldots, A_n$, v' est une $(A_1, \ldots, A_n)$ validation.

4. CORRECTION

4.1 - Lemma : Si F est un axiome de K, pour toute Σ-sequence $A_1, \ldots, A_n$ telle que F est un terme de $A_1, \ldots, A_n$, si v est une $A_1, \ldots, A_n$ validation, alors $v(F) = 1$.

Démonstration : Si F est un axiome classique pour toute semi-validation s, $s(F) = 1$. Puisque v est une semi-validation, $v(F) = 1$. - Si F n'est pas un axiome classique, F est de la forme $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$. Si $v(F) = 0$ alors $v(\Box(A \supset B)) = v(\Box A) = 1$ et $v(\Box B) = 0$ - puisque v est une semi-validation. Mais alors, d'après 3.3 il devrait exister une $A_1, \ldots, A_n$ validation v' telle que $v'(A \supset B) = v'(A) = 1$ et $v'(B) = 0$, ce qui est impossible. Donc, $v(F) = 1$.

4.2 - Théoreme : Si $\vdash_K F$ et $A_1, \ldots, A_n$ est une Σ-séquence telle que F est un terme de $A_1, \ldots, A_n$, alors pour toute $(A_1, \ldots, A_n)$ validation v, $v(F) = 1$

Démonstration : par induction en théorèmes. Si F est un axiome la propriété est prouvé dans 4.1. Supposons que F a été obtenu par Modus Ponens à partir de $F' \supset F$ et F'. Soit $A_1, \ldots, A_n, \ldots, A_{n+j}$ une Σ-sequence telle que $F' \supset F$ est un terme de $A_1, \ldots, A_n, \ldots, A_{n+j}$. Soit v' l'extension normale de v à $A_1, \ldots, A_n, \ldots, A_{n+j}$. Alors F' est un terme de $A_1, \ldots, A_n, \ldots, A_{n+j}$ et $v'(F' \supset F) = v'(F') = 1$ (par l'hipothèse d'induction); donc, $v'(F) = 1$. Mais, puisque $F \in \{A_1, \ldots, A_n\}$, $v'(F) = v(F)$, ainsi, $v(F) = 1$.

4.3 - Théorème : Si $\vdash_K F$ alors pour toute validation v, $v(F) = 1$.

Démonstration : Soit $A_1, \ldots, A_n$ une Σ-sequence telle que pour un certain i, $1 \leq i \leq n$, $F = A_i$. Soit v une validation. Alors v est une $(A_1, \ldots, A_n)$ validation, donc, par 4.2, $v(F) = 1$.

4.4 - Définition : Soit v une validation. Alors $v \models \Gamma$ si $v(A) = 1$ pour tout $A \in \Gamma$; et $\Gamma \models F$ si $v(F) = 1$, pour toute validation v telle que $v \models \Gamma$.

4.5 - Théorème : Si $\Gamma \vdash_K F$ alors $\Gamma \models F$.

Démonstration : par induction en théorèmes.

5. COMPLETUDE.

5.1 - Definition : Δ est F-saturé (dans K) si $\Delta \nvdash_K F$ et pour tout $G \notin \Delta$, $\Delta \cup \{G\} \vdash_K F$

5.2 - Lemma : Si Δ est F-saturé (dans K), $A \in \Delta$ si et seulement si $\Delta \vdash_K A$.

5.3 - Corollaire : Si Δ est F-saturé (dans K),

1) $\neg A \in \Delta$ si et seulement si $A \notin \Delta$

2) $A \supset B \in \Delta$ si et seulement si $A \notin \Delta$ ou $B \in \Delta$

5.4 - Lemma : Si Δ est F-saturé (dans K), la fonction caractéristique de Δ est une semi-validation.

5.5 - Lemma : Si $\Gamma \nvdash_K F$ il y a un Δ tel que $\Gamma \subset \Delta$ et Δ est F-saturé (dans K).

Démonstration : analogue à la démonstration du lemma de Lindenbaum dans le cas classique

5.6 - <u>Lemma</u> : Soit Δ F-saturé (dans K), $\Delta^{\Box} = \{A : A$ est de la forme $\Box B\}$ et $\mathcal{E}(\Delta^{\Box}) = \{A : \Box A \in \Delta^{\Box}\}$.
Si $\Box A \notin \Delta^{\Box}$, il y a un Δ', Δ' est A saturé (dans K) et $\mathcal{E}(\Delta^{\Box}) \subset \Delta'$.
<u>Démonstration</u> : Si $\Box A \notin \Delta^{\Box}$, $\Box A \notin \Delta$ et, par 5.2, $\Delta \nvdash_K \Box A$; donc $\Delta^{\Box} \nvdash_K \Box A$. Ainsi, par la règle R (voir 1.2), $\mathcal{E}(\Delta^{\Box}) \nvdash_K A$ et, par 5.5, il y a un Δ', Δ' est A saturé (dans K) et $\mathcal{E}(\Delta^{\Box}) \subset \Delta'$

5.7 - <u>Lemma</u> : Si Δ est F-saturé (dans K) et h est la fonction caractéristique de Δ, pour toute Σ-sequence $A_1, \dots, A_n$, h est une $(A_1, \dots, A_n)$ validation.
<u>Démonstration</u> : par induction en n. Si $n = 1$, la proposition est triviale. Soit $n > 1$. Nous avons que h est une semi-validation et, par l'hypothèse d'induction, h est une $(A_1, \dots, A_{n-1})$ validation. Ainsi si A_n n'est pas de la forme $\Box A_i$, la proposition est prouvée. Si $A_n = \Box A_i$, nous avons deux cas:
1) $h(A_n) = 0$. Alors $A_n \notin \Delta$, c'est à dire, $\Box A_i \notin \Delta^{\Box}$ et, par 5.6 il y a un Δ' A_i saturé (dans K) tel que $\mathcal{E}(\Delta^{\Box}) \subset \Delta'$; soit h' la fonction caractéristique de Δ'; par l'hypothese d'induction, h' est une $(A_1, \dots, A_{n-1})$ validation ; mais, puisque pour toute A_j de la forme $\Box A_k$, $j, k < n$, si $h(A_j) = 1$, $A_k \in \mathcal{E}(\Delta^{\Box})$, nous avons que $h'(A_k) = 1$; et puisque Δ' est A_i saturé, $h'(A_i) = 0$.
Donc la proposition vaut pour le cas.
2) $h(A_n) = 1$. Alors $A_i \in \mathcal{E}(\Delta^{\Box})$ et pour toute A_p de la forme $\Box A_q$, $p, q < n$, si $A_p \notin \mathcal{E}(\Delta^{\Box})$; puisque $A_p = \Box A_q$, par 5.6 il existe Δ_p A_q saturé tel que $\mathcal{E}(\Delta^{\Box}) \subset \Delta_p$.
Ainsi si h_p est la fonction caractéristique de Δ_p, $h_p(A_q) = 0$, $h_p(A_i) = 1$ et pour tout $A \in \mathcal{E}(\Delta^{\Box})$, $h_p(A) = 1$.
Puisque, par l'hypothese d'induction, h_p est une $(A_1, \dots, A_{n-1})$

validation, la proposition vaut aussi pour ce cas; et comme tous les cas ont été examinés, le lemme est demontré.

5.8 - Corollaire : Si Δ est F-saturé (dans K) et h est la fonction caractéristique de Δ, h est une validation.

5.9 - Théorème : Si $\nvdash_K F$ alors, pour toute Σ-sequence $A_1, \ldots, A_n$, telle que F est un de ses termes, il y a une $(A_1, \ldots, A_n)$ validation v telle que $v(F)=0$.
Démonstration : suit de 5.5 et 5.7

5.10 - Théorème : Si $\Gamma \nvdash_K F$ alors il y a une validation v telle que $v \models \Gamma$ et $v(F)=0$.
Démonstration : suit de 5.5. et 5.8.

6. UNE MÉTHODE DE DÉCISION POUR K.

Supposons que : 1) Nous avons un algorithme pour trouver, pour chaque formule F, une Σ-sequence où figure F; 2) Nous avons, pour chaque Σ-séquence $A_1, \ldots, A_n$, un algorithme qui nous donne chacune des possibles combinaisons des valeurs 0 et 1 qu'une même validation v peut associer à $A_1, \ldots, A_n$ (observons que le nombre de ces combinaisons est fini). Alors nous pouvons décider K par cette méthode. Puisqu'il est clair que l'hypothese 1) est vrai, il nous faut seulement prouver 2). Notre algorithme $T(A_1, \ldots, A_n)$ sera d'abord expliqué intuitivement dans 6.1; ensuite, dans 6.2, nous en donnons une définition rigoureuse.

6.1. On construit un tableau pour $A_1, .., A_n$ en procédant comme dans le cas du calcul classique sauf pour les formules de la forme $\Box A$. Supposons, par exemple, qu'on veut construire un tableau pour $p, \Box p, \neg p, p \supset \neg p, \Box(p \supset \neg p)$.
Construisons d'abord un tableau pour p. Puisque nous voulons avoir dans le tableau un representant de chaque classe de validations équivalentes dans p, il est clair qu'on peut construire le tableau de la façon suivante:

	p
1)	1
2)	0

On démontre facilement ($\phi \nVdash_K p$, $p \nVdash_K \neg(p \supset p)$) qu'il y a exactement deux classes non-vides de validations équivalentes dans p; l'une representée par la ligne 1, l'autre par la ligne 2. Notons $\{v_j\}^\sigma$ la classe des validations équivalentes dans σ et représentée par la ligne j. Pour construire le tableau de $p, \Box p$ il faut donc décider, pour chaque $\{v_j\}^p$, a) si pour toute $v \in \{v_j\}^p$, $v(\Box p) = 0$, ou bien b) si pour toute $v \in \{v_j\}^p$, $v_i(\Box p) = 0$, ou encore c) s'il y a des v' et des v'' telles que $v', v'' \in \{v_j\}^p$, $v'(\Box p) = 1$ et $v'(\Box p) = 0$. Il est alors naturel de considérer les conditions 2.I, 2.II, de 2.4 et de stipuler: 1) si seulement la condition imposée dans 2.I est satisfaite, nous sommes dans le cas a); 2) si seulement la condition imposée dans 2.II est satisfaite, nous avons le cas b); si les deux se réalisent, nous sommes dans le cas c). Dans notre exemple nous avons le cas c) pour $\{v_1\}$ et pour $\{v_2\}$ puisque dans la séquence p il n'y a pas de formule de la forme $\Box A$. Ainsi $\{v_1\}^p$ contient deux classes $\{v'\}^{p,\Box p}$ et $\{v''\}^{p,\Box p}$; le même se passe avec $\{v_2\}^p$. Ajoutons alors deux nouvelles lignes, l_3 et l_4 et faisons: $l_1(\Box p) = l_1(p) = 1$, $l_2(\Box p) = l_2(p) = 0$, $l_3(p) = l_1(p) = 1$, $l_3(\Box p) = 0$, $l_4(p) = l_2(p) = 0$, $l_4(\Box p) = 1$:

	p	$\Box p$
1)	1	1
2)	0	0
3)	1	0
4)	0	1

On poursuit le tableau procédant comme dans les tableaux classiques pour les formules de la forme $\neg A$ ou de la forme $A \supset B$ et en suivant la règle obtenue ci-dessus dans le cas des formules de la forme $\Box A$. Ainsi notre tableau pour $p, \Box p, \neg p, p \supset \neg p, \Box(p \supset \neg p)$ sera le suivant :

	p	$\Box p$	$\neg p$	$p \supset \neg p$	$\Box(p \supset \neg p)$
1)	1	1	0	0	0
2)	0	0	1	1	1
3)	1	0	0	0	0
4)	0	1	1	1	1
5)	1	1	0	0	1
6)	0	0	1	1	0
7)	1	0	0	0	1
8)	0	1	1	1	0

Observons que : 1) la ligne l_1 est justifiée par soi même : nous avons $l_1(\Box p) = 1$ et $l_1(\Box(p \supset \neg p)) = 0$ mais $l_1(p) = 1$ et $l_1(p \supset \neg p) = 0$; 2) la même chose se passe pour l_2, l_3, l_4. 3) l_5, l_6, l_7, l_8 représentent des sous-classes des validations représentées par le segment jusqu'à $p \supset \neg p$ de l_1, l_2, l_3, l_4, respectivement. 4) l_5 est justifiée par l_2 ou par l_4 étant donné que $l_2(p \supset \neg p) = l_4(p \supset \neg p) = 1$ et l'ensemble $\{A : \Box A \in \{p, \ldots, p \supset \neg p\}$ et $l_5(\Box A) = 0\}$ est vide ; 5) l_6 est justifiée par l_1 ou par l_3 puisque $l_1(p \supset \neg p) = l_3(p \supset \neg p) = 0$ et l'ensemble $\{A : \Box A \in \{p, \ldots, p \supset \neg p\}$ et $l_6(\Box A) = 1\}$ est vide ; 6) l_7 est justifiée par l_2 : l'ensemble $\{A : \Box A \in \{p, \ldots, p \supset \neg p\}$ et $l_7(\Box A) = 0\} = \{p\}$; et l'ensemble $\{A : \Box A \in \{p, \ldots, p \supset \neg p\}$ et $l_7(\Box A) = 1\}$ est vide ; or $l_2(p) = 0$ et $l_2(p \supset \neg p) = 1$.
7) l_8 est justifiée par l_1 puisque $l_1(p \supset \neg p) = 1$, l'ensemble $\{A : \Box A \in \{p, \ldots, p \supset \neg p\}$ et $l_8(A) = 1\} = \{p\}$ et $l_1(p) = 1$.

Donnons maintenant une définition précise d'un tableau pour une Σ-sequence $A_1, \ldots, A_n$

6.2 - Le tableau $J(A_1, \ldots, A_n)$ est une fonction $a_n : I_n \times J(I_n) \to \{0,1\}$ ou $I_n = \{1, \ldots, n\}$ de sorte que :

1) si $n = 1$, $J(I_n) = \{1,2\}$ et $a_1(1,1) = 1$, $a_1(1,2) = 0$

2) si $n > 1$ et $J(I_{n-1}) = \{1, \ldots, q\}$, nous avons 4 cas :

a) A_n est une variable propositionnelle. Alors, $J(I_n) = \{1, \ldots, 2q\}$ et :
- pour $i < n$, $j \in J(I_{n-1})$, $a_n(i,j) = a_{n-1}(i,j)$;
- pour $i < n$, $j' \in J(I_{n-1})$ et $j = q + j'$, $a_n(i,j) = a_{n-1}(i,j')$;
- pour $i = n$, $j \in J(I_{n-1})$, $a_n(i,j) = 1$;
- pour $i = n$, $j' \in J(I_{n-1})$ et $j = q + j'$, $a_n(i,j) = 0$.

b) $A_n = \neg A_k$. Alors $J(I_n) = J(I_{n-1})$ et,
- pour $i < n$, $a_n(i,j) = a_{n-1}(i,j)$;
- pour $i = n$, $a_n(i,j) = 1$ si et seulement si $a_{n-1}(k,j) = 0$.

c) $A_n = A_k \supset A_\ell$. Alors $J(I_n) = J(I_{n-1})$ et,
- pour $i < n$, $a_n(i,j) = a_{n-1}(i,j)$;
- pour $i = n$, $a_n(i,j) = 1$ si et seulement si $a_{n-1}(k,j) = 0$ ou $a_{n-1}(\ell,j) = 1$.

d) $A_n = \Box A_k$. Pour chaque $j \in J(I_{n-1})$,

I) Soit $\alpha_{(j,n-1)} = \{ j' \in J(I_{n-1}) : a_{n-1}(k,j') = 0$ et pour tout r, $1 \leq r < n$, si $A_r = \Box A_s$ et $a_{n-1}(r,j) = 1$ alors $a_{n-1}(s,j') = 1 \}$

II) pour chaque $A_p = \Box A_q$, $1 \leq p < n$, tel que $a_{n-1}(p,j) = 0$, soit $\beta(p,j,n-1) = \{ j' \in J(I_{n-1}) : a_{n-1}(q,j') = 0$, $a_{n-1}(k,j') = 1$ et pour tout r, $1 \leq r < n$, si $A_r = \Box A_s$ et $a_{n-1}(r,j) = 1$ alors $a_{n-1}(s,j') = 1 \}$.

III) soit maintenant $\{j_1, \ldots, j_m\} \subset J(I_{n-1})$ tel que : $j_{m'} < j_{m''}$ si $m' < m''$; $j_{m'} \in \{j_1, \ldots, j_m\}$ si $\alpha_{(j_{m'}, n-1)} \neq \emptyset$ et pour chaque p, $\beta(p, j_{m'}, n-1) \neq \emptyset$.

Alors, $J(I_n) = \{1, \ldots, q, \ldots, q+m\}$ et :
- pour $i < n$, $j \leq q$, $a_n(i,j) = a_{n-1}(i,j)$;
- pour $i < n$, $j = q + m'$, $a_n(i,j) = a_{n-1}(i, j_{m'})$;

- pour $i=n$, j tel que $\alpha_{(j,n-1)}=\emptyset$, $a_n(i,j)=1$
- pour $i=n$, j tel que pour un certain p, $\beta_{(p,j,n-1)}=\emptyset$, $a_n(i,j)=0$
- pour $i=n$, $m'\in\{1,\dots,m\}$: pour $j=j_{m'}$, $a_n(i,j)=a_n(k,j)$ et pour $j=q+m'$, $a_n(i,j)\neq a_{n-1}(k,j_{m'})$.

6.3 - Lemma : Soit $a_n: I_n\times J(I_n)\to\{0,1\}$, le tableau $T(A_1,\dots,A_n)$. Alors pour tout $j\in J(I_n)$ il y a une validation v telle que pour tout i, $1\le i\le n$, $v(A_i)=a_n(i,j)$

Démonstration : soit $\{A_1,\dots,A_n\}_j^u=\{A_i : i\in\{1,\dots,n\}$ et $a_n(i,j)=u\}$
Il suffit de démontrer, par induction en n que si $A_i\in\{A_1,\dots,A_n\}_j^0$, $\{A_1,\dots,A_n\}_j^1\nvdash_K A_i$

6.4 - Lemma : Soit $a_n: I(n)\times J(I_n)\to\{0,1\}$, le tableau $T(A_1,\dots,A_n)$. Alors pour toute validation v il y a un $j\in J(I_n)$ tel que pour tout i, $1\le i\le n$, $v(A_i)=a_n(i,j)$.

Démonstration : par induction en n

6.5 - Théorème : Soit $a_n: I(n)\times J(I_n)\to\{0,1\}$, le tableau $T(A_1,\dots,A_n)$. Alors, pour $1\le i\le n$, $\vdash_K A_i$ si et seulement si pour tout $j\in J(I_n)$, $a_n(i,j)=1$

6.6 - Corollaire : K est décidable par la méthode des tableaux des validations.

7. EXTENSION DE LA MÉTHODE À D'AUTRES CALCULS : T, S_4, S_5, B

Il y a plusieurs façons d'adapter nos méthodes aux calculs T, S_4, S_5 et B, respectivement. Peut être la plus simple est celle d'adapter la condition 2 de 2.4 de la façon suivante : ...

- pour T : si $n > 1$, ... si $A_n = \Box A_i$, alors a) si $v(A_i) = 0$, $v(A_n) = 0$; b) si $v(A_i) = 1$, les conditions I, II, ...
- pour S_4 : si $n > 1$, ..., si $A_n = \Box A_i$, alors a) si $A_i \equiv \Box A_k$ alors $v(A_n) = v(A_i)$; b) si A_i n'est pas de la forme $\Box A_k$ alors : b_1) comme a) de T ; b_2) comme b) de T
- pour S_5 : si $n > 1$, ..., si $A_n = \Box A_i$, alors a) si A_i contient des occurences de $\Box$, $v(A_n) = v(A_i)$; b) si A_i ne contient pas des occurrences de $\Box$ alors, b1) comme a) de T, b_2) comme b) de T.
- pour B ; si $n > 1$, ..., si $A_n = \Box A_i$ alors a) si $A_i = \neg\Box\neg A_k$ et $v(A_k) = 1$ alors $v(A_n) = 1$; b) si $v(A_k) = 0$ ou A_i n'est pas de la forme $\neg\Box\neg A_k$ alors b_1) comme a) de T et b_2) comme b de T.

8. EXTENSION DE LA MÉTHODE À DES CALCULS QUI NE CONTIENNENT PAS LE CALCUL K.

Il est aussi clair que ce n'est pas difficil d'adapter la méthode pour des calculs qui ne contiennent par K. Un exemple trivial est celui du calcul formé par le calcul clasique plus la règle de Gödel. Il est évident qu'on peut définir une $(A_1, \ldots, A_n)$ validation comme une semi-validation pour K qui est une $(A_1, \ldots, A_{n-1})$ validation et telle que si $A_n = \Box A_i$ et $v(A_n) = 0$ alors il existe une $(A_1, \ldots, A_{n-1})$ validation v' telle que $v'(A_i) = 0$.

Toutefois, nous laissons pour une prochaine occasion l'étude plus detaillé de l'adaptation de nos méthodes à des calculs modaux moins standard.

S. Paulo, avril 1977.

Andrés Loparić.

A. Loparic: Valuations for propositional modal logics.
In this paper we present a decision procedure for Kripke's calculus K as well as the extensions to T, S_4, S_5 and B. Our procedure is based on a valuation semantics for these calculi.