Departamento de Filosofia (USP)

APOSTILA DE EXERCÍCIOS

LÓGICA II

Andréa Loparić

Terceira Edição, 1994

Índice

1. Formas sentenciais/descritivas 2
2. Relações e funções 2
3. Reconhecimento de termos e fórmulas 3
4. Árvore de geração de fórmulas 6
5. Variáveis livres ou ligadas 6
6. Interpretação (exemplos) 6
7. Denotação 7
8. Conjunto solução e valor de verdade (fórmulas atômicas) 10
9. Conectivos 11
10. Interpretações variantes, interpretações completas/incompletas 11
11. Conjunto solução e valor de verdade (fórmulas não-atômicas) 12
12. Significado formal e equivalência de sentenças 20
13. Sentenças válidas 22
14. Consistência, compatibilidade e conseqüência 23
15. Tautologias 27
16. Consistência funcional veritativa 29
17 . Dedução/teoremas 30
18. Tradução 37
19. Exercícios complementares 42

Colaboraram, na preparação desta apostila, os monitores: Otávio Augusto S. Bueno, Robinson Guitarrari, Gilmar de Moraes e Evangelina Ramos Ferreira; na editoração eletrônica, Tereza Loparić, da Humpty Dumpty Informática, e Guilherme Rodrigues Neto, do Depto. de Filosofia da USP.

1. Formas sentenciais/descritivas

7/4

1) Considere como universo o conjunto dos seres humanos e classifique as expressões abaixo como *sentenças*, *formas sentenciais*, *descrições* ou *formas descritivas*.

a) Pedro é o filho mais velho de João e Maria.
b) Napoleão nasceu antes que x.
c) A avó paterna de Tiradentes.
d) O avô materno de x.
e) y é o avô paterno de x.

2)

2. Relações e funções

7/4

1) Tome como universo o conjunto U = { 1, 2, 3, 4 }.

a) Construa U x U.
b) Construa U x U x U.

3.1 2) Considere como universo de discurso o conjunto dos pontos cardeais: U_I = {N, S, L, O}.

3.2 2) Dê exemplos de:

a) uma relação unária;
b) uma relação binária;
c) uma função unária;
d) uma função ternária.

3.1 2) Quais das relações abaixo são funções?

a) {⟨N,N⟩, ⟨S,N⟩, ⟨L,N⟩, ⟨O,L⟩}
b) {⟨N,S⟩, ⟨S,N⟩, ⟨N,L⟩, ⟨O,N⟩}
c) {⟨N,N⟩, ⟨S,S⟩, ⟨L,L⟩, ⟨O,O⟩}
d) {⟨N,N⟩, ⟨S,N⟩, ⟨L,N⟩, ⟨O,N⟩}
e) {⟨N,N,N⟩, ⟨N,S,S⟩, ⟨N,L,S⟩, ⟨N,O,N⟩, ⟨L,N,N⟩, ⟨L,S,N⟩}

4 3) Considere como universo o conjunto {1, 2, 3, 4}. Dê exemplo de:

a) uma função de um argumento definida nesse universo e com valores nesse universo;
b) uma função de dois argumentos, nas mesmas condições.

2 4) No universo {1, 2, 3, 4}, quais dos conjuntos abaixo são relações e quais são operações (funções com valores no universo)? Especifique o grau da relação ou operação encontrada.

a) $\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,4\rangle\}$
b) $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$
c) $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,5\rangle\}$
d) $\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,3\rangle\}$
e) $\{1, 2, 3\}$
f) $\{1, \langle 2,1\rangle, 3\}$
g) $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}$
h) $\{\langle 1,1,1\rangle, \langle 1,2,1\rangle, \langle 1,3,1\rangle, \langle 1,4,1\rangle, \langle 2,1,1\rangle, \langle 2,2,2\rangle, \langle 2,3,4\rangle, \langle 2,4,2\rangle, \langle 3,1,1\rangle, \langle 3,2,2\rangle, \langle 3,3,3\rangle, \langle 3,4,1\rangle, \langle 4,1,1\rangle, \langle 4,2,2\rangle, \langle 4,3,2\rangle, \langle 4,4,4\rangle\}$
i) $\{\langle 1,2,3\rangle, \langle 3,2,1\rangle, \langle 4,3,2\rangle, \langle 4,4,4\rangle, \langle 4,2,1\rangle\}$

5) Dê exemplos de locuções em português que exprimam funções em determinados universos (especifique os respectivos universos).

6) Tome como universo o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} e:

a) dê exemplo de uma relação unária;
b) dê exemplo de uma relação binária simétrica;
c) dê exemplo de uma relação binária irreflexiva;
d) dê exemplo de uma relação binária assimétrica;
e) dê exemplo de uma relação ternária.

7) Tome como universo o conjunto dos números naturais. Para cada uma das relações abaixo, indique se ela é: reflexiva, irreflexiva, simétrica, assimétrica, antissimétrica, transitiva, conexa, fortemente conexa

a) x divide y (sem deixar resto).
b) x é o dobro de y.
c) x é maior ou igual a y.
d) x é o quadrado de y.
e) x é o dobro do quadrado de y.
f) x é menor do que 2y.
g) x+y = 5.

3. Reconhecimento de termos e fórmulas

1) Classifique os símbolos abaixo, com respeito ao vocabulário do Cálculo de Predicados:

a) f^2	f) h^1_2	l) F^2	q) $\forall^1$
b) z_1	g) x^2	m) h_1	r) m
c) a^1	h) O	n) y^2	s) b^3
d) A_1	i) w	o) y_2	t) o
e) F^2_1	j) Q	p) $\wedge$	u) P

~~4) Construa a árvore de geração da~~

4) Construa a árvore de geração das fórmulas abaixo:

a) $\forall x (Fx \rightarrow Gx)$

b) $(\exists x (Fx \wedge Gx) \rightarrow \forall y\, Rxy)$

c) Ex. 4.1.a

d) Ex. 4.1.b

2) Quais das expressões são termos do Cálculo de Predicados? Quais são termos fechados?

a) $f^2a_1f^1b$
b) g^3abf^3abc
c) $g^3af^1f^2bc$
d) $\neg f^2ab$
e) f^2aP^1x
f) $g^2xh^3abf^1c$
g) a^2b^2abc
h) af^1b
i) $h^3af^1xh^2ab$
j) $\forall x\, f^1x=f^1y$

5 3) Indique, para cada uma das expressões abaixo, se ela é um *termo*, se é uma *fórmula* (atômica ou não), ou se *não é bem formada*.

a) F^1x
b) $\forall x\, F^1x$
c) F^1a
d) $\forall x\, F^1a$
e) $\neg \forall x\, F^1x \vee F^1a$
f) $(\forall x\, F^1x \rightarrow F^1a)$
g) h^2f^1ab
h) $g^3xf^1yh^2abc$
i) $(\exists x\, \forall y\, G^2xy \rightarrow \forall y\, \exists x\, G^2xy)$
j) $(\neg F^1a) \wedge (\neg F^1b)$
l) $(P \rightarrow \forall x\, P)$
m) h^2F^1a
n) $\neg h^2ab$
o) $((\forall x\, F^1x \wedge \neg F^1x) \rightarrow (P \wedge \neg P))$
p) $(a \vee b)$
q) $\neg (\neg (F^1x \rightarrow G^2xy) \leftrightarrow \forall x\, F^1x)$
r) F^2a
s) F_2a
t) $(F^1x \rightarrow \neg F^1x)$
u) $\exists x\, y\, F^2xy$

3 4) Classifique as expressões abaixo em: *termos* (fechados ou abertos), *fórmulas atômicas* (fechadas ou abertas) ou *expressões mal formadas*.

a) $F^2g^1xh^2ab$
b) $g^2ab=x$
c) R
d) $h^2bh^2bh^2bb$
e) $F^2ab=x$
f) $xy=z$
g) $f^2xy=z$
h) F^1f^2xy
i) F^1G^1x
j) $F=G$
l) $x=a$
m) $G^3h^2abf^1bb$
n) $a+b=c$
o) x^2
p) F^1x_1
q) f_1x^1

6 5) Classifique as expressões abaixo como *termos*, *fórmulas* ou *expressões mal formadas*. No caso das fórmulas, diga se são atômicas, gerais ou moleculares.

a) $x=y$
b) $F^1x=F^1y$
c) $h^2xy=f^1a$
d) $(F^2ax \rightarrow (x=a \wedge \exists y\, F^1h^1y))$
e) $\neg f^1x=h^2xy$
f) $(\neg P \rightarrow \exists y\, P)$
g) $\forall x\, \exists y\, (x=y \wedge \forall z\, (z=x \vee z=y))$
h) $\exists x\, y\, x=y$
i) $\exists a\, (a=x \vee a=b)$
j) $(a=a \vee x=x)$
l) $P \wedge \neg P$
m) $\exists x\, \exists y\, \exists z\, (x=y \rightarrow x=z)$
n) $\neg \exists x\, \neg \exists y\, x=y$
o) $\neg \neg \forall x\, f^1x=x$
p) $\neg (\forall x\, x=f^1a \leftrightarrow \exists y\, F^1y)$
q) $\neg x = \neg y$
r) $\exists z\, (F^2az \leftrightarrow (P \leftrightarrow \neg P))$
~~s) P=Q~~

2) Quais das expressões são termos do Cálculo de Predicados? Quais são termos fechados?

a) $f^2a_1f^1b$
b) g^1abf^2abc
c) $g^2af^1f^2bc$
d) $\neg f^2ab$
e) f^2af^1x
f) $g^2xb^2abf^1c$
g) a^2b^2abc
h) af^1b
i) abf^1xb^2ab
j) $\forall x\, f^1x{=}f^1y$

4) Construa a árvore de geração das fórmulas abaixo:

a) $\forall x\,(Fx \to Gx)$

b) $(\exists x\,(Fx \wedge Gx) \to \forall x\, Gx)$

c) Ex. 4.1, a

d) Ex. 4.1, b

3) Indique, para cada uma das expressões abaixo, se ela é um termo, se é uma fórmula (atômica ou não), ou se não é bem formada.

a) F^1x
b) $\forall x\, F^1x$
c) F^1a
d) $\forall x\, F^1a$
e) $\neg \forall x\, F^1x \vee F^1a$
f) $(\forall x\, F^1x \to F^1a)$
g) h^2f^1ab
h) $g^2xf^1yh^2abc$
i) $(\exists x\, \forall y\, G^2xy \to \forall y\, \exists x\, G^2xy)$
j) $(\neg F^1a) \vee (\neg F^1b)$
l) $(P \to \forall x\, P)$
m) h^2F^1a
n) $\neg h^2ab$
o) $((\forall x\, F^1x \wedge \neg F^1x) \to (P \wedge \neg P))$
p) $(a \vee b)$
q) $\neg (\neg (F^1x \to G^2xy) \leftrightarrow \forall x\, F^1x)$
r) F^2a
s) F^3a
t) $(F^1x \to \neg F^1x)$
u) $\exists x\, \forall y\, F^2xy$

8: Ex 5.1

4) Classifique as expressões abaixo em: termos (fechados ou abertos), fórmulas atômicas (fechadas ou abertas) ou expressões mal formadas.

a) $F^2g^1xh^2ab$
b) $g^2ab{=}x$
c) R
d) $h^2bh^2bh^2bb$
e) $F^2ab{=}x$
f) $xy{=}z$
g) $f^2xy{=}z$
h) F^1f^2xy
i) F^1G^1x
j) $F{=}G$
l) $x{=}a$
m) $G^1h^2abf^1bb$
n) $a{+}b{=}c$
o) x_2
p) F^1x^1
q) f^1x^1

6) Classifique as expressões abaixo como termos, fórmulas ou expressões mal formadas. No caso das fórmulas, diga se são atômicas, gerais ou moleculares.

a) $x{=}y$
b) $F^1x{=}F^1y$
c) $h^2xy{=}f^1a$
d) $(F^2ax \to (x{=}a \wedge \exists y\, F^1h^1y))$
e) $\neg f^1x{=}h^2xy$
f) $(\neg P \to \exists y\, P)$
g) $\forall x\, \exists y\, (x{=}y \vee \forall z\, (z{=}x \vee z{=}y))$
h) $\exists x\, \forall y\, x{=}y$
i) $\exists a\, (a{=}x \vee a{=}b)$
j) $(a{=}a \vee x{=}x)$
l) $P \wedge \neg P$
m) $\exists x\, \exists y\, \exists z\, (x{=}y \to x{=}z)$
n) $\neg \exists x\, \neg \exists y\, x{=}y$
o) $\neg \neg \forall x\, f^1x{=}x$
p) $\neg (\forall x\, x{=}f^1a \leftrightarrow \exists y\, F^1y)$
q) $\neg x = \neg y$
r) $\exists x\, (F^2ax \leftrightarrow (P \leftrightarrow \neg P))$
s) $P{=}Q$

9 ~~7~~ ~~6~~) Seja α a fórmula abaixo:

$$\neg \exists x\, (\forall y\, (F^2af^1y \vee \neg \exists z\, f^1z{=}a) \leftrightarrow H^1f^1a)$$

Indique:

a) os termos fechados que ocorrem em α;

b) as subfórmulas atômicas que ocorrem em α;

c) as subfórmulas de α que são sentenças gerais.

7 ~~4~~ ~~1~~) Diga ~~Dizer~~ se a expressão abaixo é uma fórmula; se é uma sentença; se é atômica, geral ou molecular; se x ocorre livre na expressão ou se a expressão é mal formada.

a) F^1x

b) $\forall x\, F^1x$

c) F^1a

d) $\forall x\, F^1a$

e) $\neg \forall x\, F^1x \vee F^1a$

f) $(\forall x\, F^1x \rightarrow F^1a)$

g) $\forall x\, \forall y\, (F^1xy \rightarrow F^1yx)$

h) $x{=}y$

i) $(h^1x \vee g^1y)$

j) $\forall x\, (x{=}y \vee f^1x{=}z)$

l) $(\neg f^1x{=}y \rightarrow \forall x\, F^1x)$

m) $F^1x{=}F^1y$

n) $(\exists x\, \forall y\, G^2xy \rightarrow \forall y\, \exists x\, G^2xy)$

o) $(\forall x\, F^1x \vee \neg F^1x)$

p) $\forall x\, (F^1x \vee \neg F^1x)$

q) $(F^1a \rightarrow (\neg F^1a \rightarrow F^1a))$

r) $(P \rightarrow \forall x\, P)$

s) $(((F^1a \leftrightarrow F^1x) \leftrightarrow F^1a) \leftrightarrow F^1x)$

t) $(\neg F^1a) \wedge (\neg F^1b)$

u) $(x{=}y \rightarrow f^1x{=}f^1y)$

v) $(h^2xy{=}z \rightarrow \neg\, (\forall x\, F^1x \vee \exists y\, y{=}z))$

x) $\neg \forall x\, \forall y\, (h^2xf^1y{=}x \wedge \neg H^2yx)$

y) $\neg \forall x\, \neg \neg \forall y\, (F^2xy \leftrightarrow f^1x{=}h^2yx)$

z) $5+4=9$

10 ~~8~~) Dê exemplo de:

a) uma fórmula atômica onde não ocorrem termos;

b) um termo que não contém variáveis;

c) um termo que não contém constantes individuais;

d) um termo onde ocorrem dois símbolos funcionais distintos;

e) uma fórmula atômica contendo variáveis;

f) uma fórmula que contém símbolos de quantificação;

g) uma fórmula contendo conectivos binários;

h) uma fórmula onde a negação ocorre três vezes;

i) uma fórmula cujas partes atômicas são letras sentenciais;

j) uma fórmula que é a negação de uma fórmula atômica.

10 ~~9~~) Dê exemplo de:

a) uma sentença que contém uma subfórmula geral que não é sentença;

b) uma sentença condicional cujo antecedente é uma fórmula geral e cujo conseqüente é uma fórmula molecular;

c) uma fórmula que não contém ocorrências de símbolos individuais;

d) uma disjunção cujos disjuntivos sejam negações de fórmula gerais.

e) uma sentença CS.

4. ESTRUTURA MOLECULAR DE SENTENÇAS

1. Para cada uma das sentenças abaixo,

1.1) Construa sua árvore de composição molecular

1.2) Identifique os componentes sentenciais básicos

1.3) Construa uma CS-associada.

a)

b)

c)

d)

e)

2. Construa a tabela de verdade de:

a)

b)

c)

3. Ex 15.1 + 15.3

4. Ex 15.4

5. Ex 15.5 letras a, b

6. Ex 16.1

7. Ex 16.3

8. c/ letras sentenciais

9. outras Flas.

Cons. Tend.

1ª versão

4. Árvore de geração de fórmulas

1) Construa a árvore de geração das seguintes fórmulas:

a) $\neg (\forall x\, F^2xy \rightarrow (\exists z\, (H^2zx \wedge G^2xz) \leftrightarrow \neg\, G^2xz))$

b) $\forall x\, (\neg\exists y\, (H^2xy \rightarrow F^2h^1ab) \vee (Q \rightarrow \neg\,\neg\, (F^2xz \wedge H^2ag^2xb)))$

2) Construir a árvore de geração das seguintes fórmulas:

Suplementares

a) $\neg (\forall x\, F^2xy \rightarrow (\exists z\, (H^2zx \wedge x=z) \leftrightarrow \neg\, x=y))$

b) $\forall x\, (\neg\, \exists y\, (H^2xy \rightarrow x=y) \vee \exists y\, ((\neg\, x=y \wedge f^1a=x) \rightarrow x=y))$

5. Variáveis livres ou ligadas

1) Nas fórmulas abaixo, classifique as ocorrência das variáveis como *livres* ou *ligadas*.

a) $\forall x\, (F^2xy \rightarrow \exists y\, (y=a \rightarrow (\forall z\, F^1z \vee h^2zy=x)))$

b) $(\neg\, h^2xy=a \vee \forall z\, (\exists y\, h^2yz=x \rightarrow \exists y\, z=y))$

§5 6. Interpretação (exemplos)

coes

1)

2 1) Construa uma interpretação I cujo universo seja { 1, 2, 3, 4 }, destacando:

I(a)	I(f^1)
I(b)	I(g^2)
I(F^1)	I(G^2)

2) Para cada uma das fórmulas fechadas abaixo, construa uma interpretação segundo a qual a fórmula é verdadeira (basta indicar o universo e os valores associados às constantes interpretáveis que figuram na fórmula).

a) G^2ab

b) G^2f^1ab

c) F^1f^1a

d) $a=f^1b$

e) $h^2ab=f^1a$

f) $F^1h^2f^1ah^2bb$

3) Para cada uma das fórmulas do exercício anterior, construa uma interpretação segundo a qual a fórmula é falsa (basta indicar o universo e os valores associados às constantes interpretáveis que figuram na fórmula).

3 4) Dê exemplo de interpretação, destacando: I(a), I(c), I(m), $I(f^1)$, $I(g^2)$, $I(F^1)$, $I(G^1)$.

a) Tomando como universo $U_I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
b) Tomando como universo o conjunto dos seres humanos.
c) Tomando como universo o conjunto dos brasileiros.

5) Construa uma interpretação segundo a qual seja verdadeira a sentença: $\neg (F^1b \vee G^1b)$.

6) Construa uma interpretação segundo a qual a sentença $(F^1a \leftrightarrow G^1c)$ seja falsa.

§10

§6: 7. Denotação

1) 1+8

1) Seja I uma interpretação tal que:

$U_I = \{1, 2, 3, ...\}$
g^2 $I(s^2)$ = função *soma*
$I(f^1)$ = função *sucessor*
g^1 $I(q^1)$ = função *quadrado*
I(a) = 2
I(b) = 5

Determine a denotação δ_I de cada um dos termos abaixo:

a) $\delta_I(f^1q^1b)$
b) $\delta_I(s^2q^1af^1q^1b)$
c) $\delta_I(q^1s^2af^1b)$
d) $\delta_I(q^1f^1q^1s^2ab)$

2) sim! 2) Na interpretação acima seria correto escrever, por exemplo: $I(g^1)$ = antecessor? Por quê?

3) Seja I uma interpretação tal que :

$U_I = \{0, 1, 2, ...\}$
I(a) = 2
I(b) = 5
$I(f^1)$ = *o sucessor de*
$I(g^1)$ = *o quadrado de*
$I(h^2)$ = *a soma de... e...*
$I(l^2)$ = *o produto de...e...*

$I(F^1)$ = conjunto dos ímpares
$I(G^1)$ = conjunto dos primos
$I(S^2)$ = relação *divisível por*
$I(R^2)$ = relação *menor que*

Determine a denotação δ_I do termo ou o valor de verdade v_I da fórmula atômica, conforme o caso:

a) F^1h^2ab
b) $l^2g^1f^1ab$
c) $S^2g^1bf^1a$
d) $G^1h^2af^1b$
e) R^2af^1a
f) $g^1a=f^1b$
g) $h^2g^1bb=l^2f^1ah^2bb$
h) $S^2f^1bf^1a$
i) $R^2g^1af^1b$
j) $R^2h^2f^1bg^1aa$

4) Seja I a interpretação abaixo:

$U_I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$I(F^1) = \{2, 4, 6, 8\}$
$I(G^1) = \{3, 4, 5\}$
$I(R^2)$ = relação *menor que*
$I(S^2) = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 6,7\rangle\}$

$$I(h^1) = \begin{cases} 2, \text{ se } x<3; \\ 3, \text{ se } x>6; \\ 8, \text{ nos demais casos} \end{cases}$$

$$I(g^1) = \begin{cases} x+2, \text{ se } x<5; \\ x-1, \text{ se } x\geq 5 \end{cases}$$

$I(a) = 7$

Dê exemplo de um termo cuja denotação seja:

a) 5
b) 8

5) Seja I a interpretação abaixo:

U_I = conjunto dos países e cidades
$I(h^1)$ = função que associa a cada cidade, o país a que pertence, e, a cada país, sua capital
$I(a)$ = Argentina
$I(b)$ = Brasil
$I(c)$ = China
$I(f)$ = França
$I(l)$ = Londres
$I(n)$ = Nova York
$I(p)$ = Paris

Determine a denotação de cada um dos termos abaixo:

a) h^1f
b) h^1h^1b
c) h^1h^1n

6) Seja I a interpretação abaixo:

$U_I = \{0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$I(F^1) = \{1, 3, 5\}$
$I(G^1) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$I(R^2)$ = relação *menor que*
$I(S^2) = \{\langle 4,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 7,8\rangle\}$

$$I(h^1) = \begin{cases} x-1, \text{ se } x \text{ é ímpar}; \\ x+1, \text{ se } x \text{ é par} \end{cases}$$

$$I(g^1) = \begin{cases} 2, \text{ se } x<7; \\ 8, \text{ se } x\geq 7 \end{cases}$$

$I(a) = 6$

Dê exemplo de um termo cuja denotação seja:

a) 3

b) 9

7) Seja I a interpretação abaixo:

$U_I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$I(F^1) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$I(R^2) = \{\langle 3,2\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 7,6\rangle, \langle 8,7\rangle\}$

$$I(g^1) = \begin{cases} 0, \text{ se } x<3; \\ 1, \text{ se } x>5; \\ 2, \text{ nos demais casos} \end{cases}$$

$$I(h^1) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x<9; \\ x, \text{ se } x=9 \end{cases}$$

$I(a) = 6$

$I(b) = 7$

7.1) Dê exemplo de um termo cuja denotação seja:

a) 4

b) 0

7.2) Determine a denotação dos seguintes termos:

a) $h^1g^1h^1g^1b$

b) $h^1h^1h^1a$

8) Considere a interpretação abaixo:

U_I = conjunto dos números naturais

$I(a) = 1$

$I(b) = 2$

$I(c) = 0$

$I(d) = 5$

$I(f^1)$ = função *sucessor*

$I(g^1)$ = função *quadrado*

$I(h^1)$ = função *cubo*

$I(g^2)$ = função *soma*

$I(h^2)$ = função *produto*

$I(F^1)$ = conjunto dos primos

$I(G^1)$ = conjunto dos pares

$I(R^2)$ = relação *ser divisível por*

$I(M^2)$ = relação *menor que*

Calcule a denotação, segundo I, dos seguintes termos:

a) f^1h^2bd

b) $g^1h^1g^2af^1c$

c) f^1b

d) h^2af^1b

e) $g^1f^1h^1g^2ab$

f) $h^2ah^2ah^2aa$

8. Conjunto solução e valor de verdade (fórmulas atômicas)

1) Seja I uma interpretação tal que :

$U_I = \{0, 1, 2, ...\}$
$I(a) = 2$
$I(b) = 5$
$I(f^1)$ = *o sucessor de*
$I(g^1)$ = *o quadrado de*
$I(h^2)$ = *a soma de... e...*
$I(l^2)$ = *o produto de...e...*

$I(F^1)$ = conjunto dos ímpares
$I(G^1)$ = conjunto dos primos
$I(S^2)$ = relação *divisível por*
$I(R^2)$ = relação *menor que*

Indique o conjunto solução das fórmulas abaixo:

a) F^1x
b) $R^2xg^1f^1a$
c) S^2xb
d) S^2f^1bx
e) F^1g^1x
f) G^1g^1x
g) R^2xb
h) R^2bx
i) $h^2xy=a$
j) $R^2l^2xyf^1a$
l) $R^2g^1xf^1x$
m) S^2xl^2ab

2) Considere a interpretação abaixo:

U_I = conjunto dos números naturais
$I(a) = 1$
$I(b) = 2$
$I(c) = 0$
$I(d) = 5$
$I(f^1)$ = função *sucessor*
$I(g^1)$ = função *quadrado*
$I(h^1)$ = função *cubo*
$I(g^2)$ = função *soma*
$I(h^2)$ = função *produto*

$I(F^1)$ = conjunto dos primos
$I(G^1)$ = conjunto dos pares
$I(R^2)$ = relação *ser divisível por*
$I(M^2)$ = relação *menor que*

Calcule o valor de verdade, segundo I, das sentenças abaixo:

a) F^1a
b) R^2ab
c) R^2ba
d) M^2af^1b
e) $M^2g^1ah^2ab$
f) G^1h^2ab
g) $a=f^1b$
h) $f^1a=h^2ab$
i) $h^2f^1bb=g^1g^1g^2ab$
j) $g^2bb=h^2bb$
l) $F^1g^2h^1f^1bb$

9. Conectivos

Retrumulado como §4.10 e §4.11

1) Resolva os seguintes problemas:

a) sem usar conectivos outros que " ¬ " e " ∧ ", expresse, por meio de uma tabela de verdade, as 16 funções de verdade existentes; binárias

b) sem usar conectivos outros que " ¬ " e " ∨ ", expresse, por meio de uma tabela de verdade, as 16 funções de verdade existentes; binárias

c) sem usar conectivos outros que " ¬ " e " → ", expresse, por meio de uma tabela de verdade, as 16 funções de verdade existentes;

d) usando, no máximo, os conectivos " ¬ " e " ↔ ", exprima 4 das funções de verdade. unários

10. Interpretações variantes, interpretações completas/ incompletas

§5.5 1) Considere as interpretações I e I' abaixo:

$U_I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$U_{I'} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
$I(F^1) = \{1, 2, 3\}$	$I'(F^1)$ = cj. dos ímpares
$I(G^1) = \{1, 3, 4\}$	$I'(G^1) = \{3, 7, 18\}$
$I(R^2) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$I'(R^2)$ = relação *menor que*
$I(f^1)$ = função que associa a qualquer objeto o 2	$I'(f^1)$ = função *quadrado*
$I(a) = 1$	$I'(a) = 1$
$I(b) = 5$	$I'(b) = 2$

Quantas interpretações a-variantes de I existem? E quantas são as a-variantes de I'?

§5.6 2) Considere a interpretação abaixo:

U_I = conjunto dos números naturais

$I(a) = 1$	
$I(b) = 2$	
$I(c) = 0$	
$I(d) = 5$	
$I(f^1)$ = função *sucessor*	$I(F^1)$ = conjunto dos primos
$I(g^1)$ = função *quadrado*	$I(G^1)$ = conjunto dos pares
$I(h^1)$ = função *cubo*	$I(R^2)$ = relação *ser divisível por*
$I(g^2)$ = função *soma*	$I(M^2)$ = relação *menor que*
$I(h^2)$ = função *produto*	

Dê exemplo de uma interpretação b-variante da interpretação apresentada acima.

§5.4 3) Dê exemplo de:

a) uma interpretação completa;
b) uma interpretação incompleta.

11. Conjunto solução e valor de verdade (fórmulas não-atômicas)

1) Considere a interpretação abaixo e determine os valores de verdade v_I de cada uma das fórmulas:

$U_I = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
$I(a) = 0$
$I(b) = 5$
$I(f^1)$ = função *sucessor*
$I(g^1)$ = função *quadrado*
$I(s^2)$ = função *soma*
$I(P^1)$ = conjunto dos primos
$I(M^2)$ = relação *múltiplo de*
$I(R^2)$ = relação *menor que*

a) $v_I(\neg R^2ab)$
b) $v_I((s^2ab=g^1f^1f^1a) \wedge P^1b)$
c) $v_I(R^2ab \vee f^1a=b)$
d) $v_I(f^1a=b \leftrightarrow f^1b=a)$
e) $v_I(P^1b \rightarrow R^2ba)$
f) $v_I(\neg (R^2ab \wedge R^2ba))$
g) $v_I(M^2af^1b \rightarrow M^2f^1bf^1a)$
h) $v_I(\neg (P^1a \vee P^1b))$
i) $v_I(\neg P^1a \vee P^1b)$
j) $v_I(a=b \rightarrow b=a)$

2) Considere as interpretações I e I' abaixo:

$U_I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$I(F^1) = \{1, 2, 3\}$
$I(G^1) = \{1, 3, 4\}$
$I(R^2) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 4,1\rangle\}$
$I(f^1)$ = função que associa a qualquer objeto o 2
$I(a) = 1$
$I(b) = 5$

$U_{I'} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
$I'(F^1)$ = cj. dos ímpares
$I'(G^1) = \{3, 7, 18\}$
$I'(R^2)$ = relação *menor que*
$I'(f^1)$ = função *quadrado*
$I'(a) = 1$
$I'(b) = 2$

2.1) Determine o conjunto solução, em I, das seguintes fórmulas:

a) $(F^1x \wedge \neg G^1x)$
b) F^1f^1x
c) R^2xa
d) $(R^2xa \wedge f^1x=b)$
e) $(G^1f^1x \vee \neg G^1x)$
f) $(\neg R^2ya \leftrightarrow \neg F^1y)$
g) $(F^1x \rightarrow G^1x)$
h) $(G^1x \rightarrow F^1x)$
i) $\neg (F^1x \wedge G^1x)$
j) $\neg (F^1z \vee G^1z)$

2.2) Determine o conjunto solução dessas mesmas fórmulas em I'.

2.3) Em I', dê exemplo de uma fórmula cujo conjunto solução seja:

a) $\{2\}$
b) $\{1, 3\}$
c) $\{3, 7\}$
d) $\{4, 6, 8, 10, 12, ...\}$
e) $U_{I'}$

2.4) Em I, dê exemplo de uma fórmula cujo conjunto solução seja:

a) $\{4, 5\}$
b) $\{3\}$
c) $\{5\}$
d) $\{4\}$
e) $\{\ \}$
f) $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

2.5) Determine o valor de verdade, segundo I, das sentenças abaixo:

a) $\forall x\, F^1x$
b) $\forall x \neg F^1x$
c) $\exists x\, G^1x$
d) $\exists x \neg G^1x$
e) $\neg \forall x\, G^1x$
f) $\neg \forall x \neg G^1x$
g) $\neg \exists x\, F^1x$
h) $\neg \exists x \neg F^1x$
i) $\exists x\, (F^1x \wedge G^1x)$
j) $\exists x\, (F^1x \vee G^1x)$
l) $\exists x\, (R^2xa \wedge G^1x)$
m) $\exists x\, (R^2xb \vee R^2ax)$
n) $\forall x\, (F^1x \rightarrow R^2ax)$
o) $\forall x\, (F^1x \rightarrow G^1x)$
p) $\forall x\, (F^1x \leftrightarrow G^1x)$
q) $(\exists x\, F^1x \wedge \exists x \neg F^1x)$

2.6) Determine o valor de verdade dessas mesmas sentenças segundo I'.

3) Resolva os seguintes problemas:

3.1) construa uma interpretação I, cujo universo são os inteiros maiores que 10, indicando: $I(a)$, $I(b)$, $I(f^1)$, $I(g^2)$, $I(P^1)$, $I(Q^1)$, $I(R^2)$, $I(S^2)$;

3.2) determine, então, os valores de verdade, segundo I, das seguintes sentenças:

a) $\exists x\, (f^1x=a \wedge g^2ab=x)$
b) $\forall x\, ((P^1x \wedge Q^1x) \rightarrow R^2xx)$
c) $\exists x\, \exists y\, (R^2xy \wedge \neg S^2xy)$
d) $\neg \exists x\, \forall y\, (Q^1y \rightarrow R^2xy)$

4) Considere a interpretação I, abaixo:

$U_I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$I(a) = 2$
$I(b) = 3$
$I(F^1) = \{1, 3, 5\}$
$I(G^1) = \{2, 6, 8\}$
$I(R^2) = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 4,8\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 6,8\rangle, \langle 7,5\rangle, \langle 8,9\rangle, \langle 9,9\rangle\}$
$I(S^2) = \{\langle 1,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 5,2\rangle\}$
$I(T^2) = \{\langle 2,2\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 6,2\rangle, \langle 8,2\rangle\}$
$I(f^1)$ = função que associa 0 aos elementos pares de U_I e 1 aos ímpares.
$I(g^1)$ = função que: a cada elemento par de U_I associa o seu sucessor;
a cada elemento ímpar de U_I associa o seu antecessor.
$I(h^1)$ = função que: a cada elemento de U_I menor que 5 associa o seu dobro;
a cada elemento maior ou igual a 5 associa o 9.

4.1) Para cada uma das fórmulas abaixo, indique seu conjunto solução em I.

a) $\exists x\, (Fx \wedge Rxy)$
b) $\exists y\, (Fy \wedge Rxy)$
c) $\exists x\, (Rxy \wedge Sxy)$
d) $\forall x\, (Gx \rightarrow Txy)$
e) $\exists x\, (y=f^1x \vee Ryx)$
f) $Sxa \wedge Txa$
g) Sf^1xy
h) Sxf^1y

i) $\exists x\ (Rxy \vee Ryx)$
j) Fg^1x
l) $(Fh^1x \vee Gg^1x)$
m) $(Fx \vee Gy)$
n) $f^1x=g^1y$
o) $f^1x=h^1y$
p) $g^1x=a$
q) $(Sxa \vee Txa)$

4.2) Dê uma fórmula cujo conjunto solução, em I, seja:

a) $\{0, 1, 3, 5\}$
b) $\{1, 2\}$
c) $\{2, 4, 6, 8, 9\}$
d) U_I
e) $\{\ \}$
f) $\{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$
g) $\{\langle 3,2\rangle\}$
h) $\{\langle 2,2\rangle, \langle 6,2\rangle, \langle 8,2\rangle\}$
i) $\{0\}$
j) $\{1\}$
l) $\{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$
m) $\{4, 7, 9\}$

4.3) Determine o valor de verdade, em I, das sentenças:

a) $\forall x\ Sxa$
b) $\forall x\ (Rxa \vee \neg\ x=b)$
c) $\exists x\ \forall y\ (Gx \rightarrow Tyx)$
d) $\forall x\ (f^1a=x \vee \exists y\ Rxy)$
e) $\forall x\ \forall y\ \neg\ (Rxy \wedge x=y)$
f) $\exists x\ \exists y\ (Sxy \wedge x=y)$
g) $\exists x\ \exists y\ (Sxy \wedge y=f^1x)$
h) $\neg\ \exists x\ \forall y\ Rxy$
i) $\forall x\ \forall y\ (Txy \rightarrow y=a)$
j) $\forall x\ \forall y\ (f^1x=y \rightarrow \neg\ Rxy)$

4.4) Determine o valor de verdade, em I, das sentenças abaixo (use, eventualmente, fórmulas equivalentes).

a) $\neg\ \forall x\ \neg\ \exists y\ (Rxy \wedge Sxy)$
b) $\neg\ \exists x\ \neg\ \exists y\ \neg\ (Fx \wedge Sxy)$
c) $\neg\ \forall x\ \forall y\ \neg\ ((Gx \wedge Fx) \vee Rxy)$
d) $\neg\ (\forall x\ Fx \rightarrow \forall y\ Gy)$
e) $\neg\ (\forall x\ \forall y\ Rxy \wedge \exists x\ \forall y\ \neg\ Sxy)$

5) Seja I a interpretação abaixo:

U_I = conjunto dos números inteiros estritamente positivos
$I(I^1)$ = conjunto dos ímpares
$I(Q^1)$ = conjunto dos números quadrados ($\{1, 4, 9, ...\}$)
$I(R^2)$ = relação *maior que*
$I(M^2)$ = relação *múltiplo de*
$I(f^1)$ = função *sucessor*
$I(s^2)$ = função *soma*
$I(a) = 1$
$I(b) = 3$
$I(c) = 20$
$I(d) = 50$

Determine o conjunto solução, segundo I, de:

a) $((Qx \wedge Rdx) \wedge \neg\ Ix)$
b) $((Rcx \wedge Ix) \vee Mcx)$
c) $(Rdx \wedge \forall y\ (Iy \rightarrow \neg\ Mxy)$
d) $((Rcx \wedge Qx) \wedge \exists y\ ((Qy \wedge \neg\ y=a) \wedge Mxy))$

6) Seja I a interpretação abaixo:

$U_I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$I(F^1) = \{2, 4, 6, 8\}$

$I(G^1) = \{3, 4, 5\}$

$I(R^2)$ = relação *menor que*

$I(S^2) = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 6,7\rangle\}$

$I(h^1) = \begin{cases} 2, \text{ se } x<3; \\ 3, \text{ se } x>6; \\ 8, \text{ nos demais casos} \end{cases}$

$I(g^1) = \begin{cases} x+2, \text{ se } x<5; \\ x-1, \text{ se } x\geq 5 \end{cases}$

$I(a) = 7$

6.1) Determine o conjunto solução de:

a) $((Fx \wedge Gx) \vee x=g^1a)$

b) $\exists y\ (Sxy \wedge Rxy)$

c) $\forall x\ (Gx \rightarrow Rxy)$

6.2) Determine os valores de verdade, segundo I, das seguintes sentenças:

a) $\exists x\ \forall y \neg\ h^1x=y$

b) $\exists x\ \exists y\ (h^1x=g^1y \wedge Sxy)$

c) $\forall x\ \forall y\ ((Fx \wedge Gy) \rightarrow Rxy)$

d) $\neg\ \exists x\ \exists y\ ((Rxy \wedge Sxy) \wedge Gx)$

7) Seja I a interpretação abaixo:

$U_I = \{0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$I(F^1) = \{1, 3, 5\}$

$I(G^1) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$I(R^2)$ = relação *menor que*

$I(S^2) = \{\langle 4,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 7,8\rangle\}$

$I(h^1) = \begin{cases} x-1, \text{ se } x \text{ é ímpar}; \\ x+1, \text{ se } x \text{ é par} \end{cases}$

$I(g^1) = \begin{cases} 2, \text{ se } x<7; \\ 8, \text{ se } x\geq 7 \end{cases}$

$I(a) = 6$

7.1) Determine o conjunto solução de:

a) $((Fx \wedge Gx) \vee x=h^1a)$

b) $\exists y\ (Sxy \wedge \neg\ Rxy)$

c) $\forall y\ (\neg\ Sxy \wedge \neg\ Gy)$

7.2) Determine os valores de verdade, segundo I, das seguintes sentenças:

a) $\exists x\ \forall y\ h^1x=y$

b) $\exists x\ \exists y\ (h^1x=g^1y \wedge Sxy)$

c) $\forall x\ \forall y\ (Sxy \rightarrow (Rxy \vee Gx))$

d) $\neg\ \exists x\ \exists y\ ((Rxy \wedge Sxy) \wedge g^1x=y)$

8) Seja I a interpretação abaixo:

$U_I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$I(F^1) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$I(R^2) = \{\langle 3,2\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 7,6\rangle, \langle 8,7\rangle\}$

$$I(g^1) = \begin{cases} 0, \text{ se } x<3; \\ 1, \text{ se } x>5; \\ 2, \text{ nos demais casos} \end{cases}$$

$$I(h^1) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x<9; \\ x, \text{ se } x=9 \end{cases}$$

$I(a) = 6$

$I(b) = 7$

Dê exemplo de uma fórmula cujo conjunto solução seja:

a) $\{5,7\}$

b) $\{0,1\}$

9) Considere uma interpretação I tal que:

U_I = conjunto dos números inteiros positivos

$I(F^1)$ = conjunto dos inteiros pares

$I(G^1) = \{1, 7, 11, 19, 20\}$

$I(R^2) = \{\langle 1,10\rangle, \langle 2,20\rangle, \langle 3,30\rangle, ...\}$

$I(S^2)$ = relação *menor que*

$I(a) = 1$

$I(b) = 5$

$I(f^1)$ = função *sucessor*

$I(g^2)$ = função *soma*

9.1) Determine o conjunto solução, segundo I, das seguintes fórmulas:

a) $(F^1x \wedge S^2xb)$

b) $\exists y\ ((Gy \wedge Fy) \wedge Ryx)$

c) $((Fx \wedge Gx) \vee \forall y\ (Ryb \rightarrow Rxy))$

d) $S^2f^1xg^2bb$

9.2) Dê exemplo de uma fórmula cujo conjunto solução, em I, seja:

a) $\{1, 5, 7\}$;

b) o conjunto dos inteiros positivos maiores do que 10;

c) o conjunto vazio.

9.3) Determine o valor de verdade, segundo I, das seguintes sentenças:

a) $(\forall x\ S^2xf^1x \leftrightarrow \exists y\ R^2xf^1x)$

b) $\forall x\ \forall y\ (R^2xy \rightarrow S^2xy)$

9.4) Seja I' uma interpretação que difere de I apenas por ter $I(R^2)$ = relação *divisível por*.

a) Dê exemplo de uma sentença geral verdadeira em I e falsa em I'.

b) Dê exemplo de uma sentença molecular verdadeira em I e falsa em I'.

10) Seja I uma interpretação tal que:

U_I = conjunto dos números naturais

$I(P^1)$ = conjunto dos pares

$I(R^1)$ = conjunto dos primos

$I(M^2)$ = relação *menor que*

$I(q^1)$ = função *quadrado*
$I(s^2)$ = função *soma*
$I(p^2)$ = função *produto*
$I(a) = 0$
$I(b) = 5$
$I(c) = 10$
$I(d) = 36$

10.1) Determine o conjunto solução das seguintes fórmulas:

a) $(P^1x \wedge M^2xc)$
b) $((P^1x \wedge R^1x) \wedge \exists y\, M^2yx)$
c) $\exists x\, \exists y\, p^2xy=z$
d) $\exists x\, (p^2xy=d \wedge \neg P^1y)$
e) $\forall y\, (\neg P^1y \rightarrow M^2xy)$
f) $((M^2xy \wedge M^2yb) \wedge \neg P^1x)$
g) $s^2xc=y$
h) $q^1x=y$
i) $(s^2xc=y \wedge q^1x=y)$
j) $((\neg M^2yd \wedge R^1x) \wedge M^2xy)$

10.2) Determine o valor de verdade, segundo I, das seguintes sentenças:

a) $\forall x\, (P^1x \rightarrow \exists y\, M^2xy)$
b) $\exists x\, \forall y\, p^2xy=y$
c) $\neg \exists x\, \forall y\, (P^1y \rightarrow M^2xy)$
d) $\exists x\, \exists y\, ((P^1x \wedge P^1y) \wedge s^2xy=p^2xy)$
e) $\forall x\, \forall y\, ((q^1x=y \wedge P^1y) \rightarrow P^1x)$

11) Considere o seguinte conjunto de sentenças formais:

$\{\forall x\, (Hx \leftrightarrow Rxa),\ \forall x\, \neg Rxx,\ \exists x\, \exists y\, (\neg x=y \wedge (Hx \wedge Hy))\}$.

a) Dê exemplo de uma interpretação na qual todas as sentenças do conjunto acima são verdadeiras (indique apenas a parte relevante).
b) Quantos objetos, no mínimo, deve haver no universo de uma interpretação na qual todas as sentenças do conjunto são verdadeiras?

12) Seja I uma interpretação tal que:

U_I = conjunto dos números naturais
$I(a) = 0$
$I(b) = 1$
$I(c) = 2$
$I(d) = 5$
$I(F^1)$ = conjunto dos ímpares
$I(P^1)$ = conjunto dos primos
$I(R^2)$ = relação *menor que*
$I(D^2)$ = relação *divisível por*
$I(f^1)$ = função *sucessor*
$I(q^1)$ = função *quadrado*
$I(s^2)$ = função *soma*
$I(p^2)$ = função *produto*

12.1) Determine os valores de verdade das sentenças abaixo, segundo I.

a) $R^2f^1as^2aa$
b) $p^2s^2f^1abb=c$
c) $(P^1c \wedge R^2ca)$
d) $(R^2ba \leftrightarrow \neg D^2ba)$
e) $(P^1f^1s^2dd \rightarrow (F^1a \vee P^1b))$
f) $\neg (F^1b \vee \neg (P^1a \leftrightarrow \neg F^1a))$
g) $\forall x\ R^2xf^1x$
h) $\forall x\ D^2xb$
i) $\exists x\ x=p^2xx$
j) $\exists x\ P^1f^1x$
l) $\forall x\ x=q^1f^1c$
m) $\forall x\ D^2xx$
n) $\exists x\ (P^1x \wedge \neg F^1x)$
o) $\exists x\ (P^1x \wedge (F^1x \vee R^2xd))$
p) $\forall x\ (x=a \vee R^2ax)$
q) $\forall x\ (F^1x \rightarrow R^2ax)$
r) $\forall x\ (F^1x \leftrightarrow \neg D^2xc)$
s) $\exists x\ f^1s^2xc=p^2xc$

13) Dê exemplo de:

a) uma interpretação I tal que $v_I(\forall x\ (F^1x \rightarrow G^1x)) = V$;
b) uma interpretação I tal que $v_I(\exists x\ (F^1x \wedge G^1x)) = V$.

14) Seja I uma interpretação tal que:

U_I = conjunto dos seres humanos
I(a) = Pedro I
I(b) = Princesa Isabel
I(c) = Pedro II
$I(B^1)$ = conjunto dos brasileiros
$I(M^1)$ = conjunto das mulheres
$I(S^2)$ = relação *mais velho que*
$I(I^2)$ = relação *irmão de*
$I(f^1)$ = função *o pai de*

14.1) Indique o conjunto solução, em I, de cada uma das seguintes fórmulas.

a) S^2xa
b) S^2ax
c) $(S^2ax \wedge B^1x)$
d) $x=a$
e) $(x=a \vee x=b)$
f) $(x=a \wedge x=b)$
g) $\neg (S^2xa \vee S^2ax)$
h) $x=f^1b$
i) $a=f^1x$
j) $a=f^1f^1x$
l) $(M^1x \wedge f^1x=c)$
m) $(S^2ax \wedge S^2xb)$
n) $(\neg B^1x \wedge \neg M^1x)$
o) $((M^1x \wedge B^1x) \wedge \neg S^2xa)$
p) $(\neg B^1x \wedge B^1x)$

14.2) Indique o valor de verdade, segundo I, das seguintes sentenças:

a) $\exists x\ Sxa$
b) $\forall x\ Sxa$
c) $(f^1x=c \wedge Mx)$
d) $\forall x\ (x=f^1b \rightarrow Bx)$
e) $\exists x\ ((Mx \wedge Bx) \wedge Scx)$
f) $\exists x\ ((Bx \wedge \neg Mx) \wedge Ixa)$
g) $\forall x\ ((Mx \wedge Bx) \leftrightarrow x=b)$
h) $\exists x\ \exists y\ Sxy$
i) $\exists x\ \forall y\ Sxy$
j) $\forall x\ \neg Sxx$

15) Seja I a interpretaçãp abaixo:

U_I = conjunto dos países e cidades
$I(P^1)$ = conjunto dos países
$I(E^1)$ = conjunto dos que estão na Europa
$I(A^1)$ = conjunto dos que estão na América
$I(R^2)$ = relação *fazer fronteira com*
$I(S^2)$ = relação *ser mais populoso que*
$I(h^1)$ = função que associa a cada cidade, o país a que pertence, e, a cada país, sua capital
I(a) = Argentina
I(b) = Brasil
I(c) = China
I(f) = França
I(l) = Londres
I(n) = Nova York
I(p) = Paris

Determine o valor de verdade, segundo I, das sentenças abaixo:

a) $\forall x\ (R^2xa \rightarrow R^2xb)$
b) $\exists x\ (R^2xb \wedge \neg R^2xf)$
c) $\forall x\ (R^2ax \rightarrow (\neg R^2xf \wedge \neg x=c))$
d) $\exists x\ (\neg P^1x \wedge S^2xh^1b)$
e) $\forall x\ (P^1x \rightarrow S^2xh^1x)$
f) $(\forall x\ ((A^1x \wedge P^1x) \rightarrow S^2h^1nx) \wedge \exists y\ S^2yh^1n)$
g) $\forall x\ (E^1x \leftrightarrow \neg A^1x)$
h) $\exists x\ (E^1x \wedge (h^1x=p \vee h^1x=l))$
i) $h^1p=h^1h^1f$
j) $\forall x\ h^1x=h^1h^1h^1x$

16) Resolva os problemas abaixo.

16.1) Construa uma interpretação I tal que: $U_I = \{1,2,3,4,5\}$, indicando: I(a), I(b), I(c), $I(P^1)$, $I(Q^1)$, $I(R^2)$, $I(f^1)$, $I(g^2)$.

16.2) Determine o valor de verdade das sentenças abaixo, de acordo com a interpretação construída no exercício anterior.

a) $\forall x\ P^1g^2ax$
b) $\exists x\ \forall y\ R^2yx$
c) $\forall x\ (R^2xb \rightarrow P^1x)$
d) $\exists x\ ((P^1x \wedge Q^1x) \vee R^2ax)$
e) $\neg \exists x\ \forall y\ R^2xy$
f) $\forall x\ (R^2xa \rightarrow \exists y\ R^2yz)$
g) $\neg \exists x\ \exists y\ (R^2xy \wedge (P^1x \vee Q^1y))$
h) $\forall x\ (P^1f^1x \rightarrow P^1x)$
i) $\forall x\ \forall y\ (R^2xy \rightarrow (Q^1x \wedge f^1y=x))$
j) $\forall x\ \forall y\ ((x=a \vee x=b) \vee P^1x)$
l) $\forall x\ (R^2xa \rightarrow \exists y\ (P^1y \wedge g^2xy=c))$
m) $\neg \exists x\ \exists y\ (P^1f^1x \wedge Q^1g^2xy)$
n) $\exists x\ (R^2f^1xg^2xa \wedge Q^1x)$
o) $\exists x\ \exists y\ (R^2f^1xf^1y \wedge (x=y \vee x=a))$

17) Seja I a interpretação abaixo:

U_I = conjunto dos números naturais
$I(F^1)$ = conjunto dos pares
$I(G^1)$ = conjunto dos primos
$I(R^2)$ = relação *menor que*
$I(D^2)$ = relação *divisível por*
$I(q^1)$ = função *quadrado*
$I(d^1)$ = função *dobro*
$I(t^2)$ = função *soma*
$I(s^1)$ = função que associa a cada natural n o valor n^3+5
$I(a) = 1$
$I(b) = 2$
$I(c) = 5$

Determine o valor de verdade, segundo I, das sentenças abaixo:

a) $D^2q^1cd^1a$
b) R^2s^1bc
c) G^1d^1b
d) $F^1t^2s^1ad^1c$
e) $\neg F^1s^1c$
f) $(G^1b \rightarrow D^2s^1cb)$
g) $(\neg G^1d^1b \wedge F^1a)$
h) $((G^1c \vee R^2cb) \leftrightarrow \neg F^1a)$
i) $\neg (R^2s^1ac \rightarrow (F^1c \wedge \neg \neg F^1b))$

12. Significado formal e equivalência de sentenças

1) Determine o significado formal das sentenças abaixo e, em seguida, verifique quais dentre elas são equivalentes entre si.

a) $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$
b) $\neg \exists x\ (Fx \wedge Gx)$
c) $\neg \exists x\ (Fx \vee Gx)$
d) $(\exists xFx \leftrightarrow \exists x\ Gx)$
e) $\neg \forall x\ (Fx \leftrightarrow Gx)$
f) $\forall x\ (Fx \rightarrow \neg Gx)$
g) $(\forall xFx \rightarrow \forall xGx)$
h) $(\exists x \neg Fx \leftrightarrow \exists x \neg Gx)$
i) $\forall x\ (Fx \leftrightarrow \neg Gx)$
j) $\neg \exists x\ (Fx \wedge \neg Gx)$
l) $\forall x\ (Fx \vee Gx)$
m) $(\forall x\ Fx \vee \forall x\ Gx)$
n) $(\neg \exists x\ Fx \wedge \neg \exists x\ Gx)$
o) $\neg \forall x\ (Fx \wedge Gx)$
p) $\forall x\ (Gx \rightarrow Fx)$
q) $\forall x\ (\neg Gx \vee Fx)$

2) Para cada uma das sentenças abaixo, encontre uma equivalente mais curta.

a) $\neg \forall x \neg (Fx \wedge Gx)$
b) $\exists x \neg \forall y \neg (Rxy \wedge Ryx)$
c) $\neg \forall x \neg \forall y \neg (Fx \wedge \neg Rxy)$

d) $\forall x\ (\neg\ \exists y\ \neg\ Rxy \rightarrow \neg\ \forall y\ Rxy)$

e) $(\neg\ \forall x\ \neg\ Fx \vee \neg\ \forall x\ \neg\ Gx)$

f) $(\exists x\ (Fx \wedge Gx) \vee \exists x\ (\neg\ Fx \wedge \neg\ Gx))$

3) Seja I uma interpretação qualquer. Indique o significado formal das seguintes sentenças:

a) $\exists x\ (Px \wedge Rxa)$

b) $\neg\ \exists x\ (Px \wedge Rxa)$

c) $\exists x\ (Px \wedge \neg\ Rxa)$

d) $\forall x\ (Px \rightarrow Rxa)$

e) $\neg\ \forall x\ (Px \rightarrow Rxa)$

f) $\forall x\ (Px \rightarrow \neg\ Rxa)$

g) $\forall x\ (Rax \leftrightarrow Px)$

h) $\neg\ \forall x\ (Rax \leftrightarrow Px)$

i) $\forall x\ (Rax \leftrightarrow \neg\ Px)$

j) $\forall x\ (Rax \vee Rxa)$

l) $\forall x\ (Rax \wedge Rxa)$

m) $\forall x\ \neg\ Rax$

n) $\exists x\ \exists y\ Rxy$

o) $\exists x\ \exists y\ (Px \wedge Rxy)$

p) $\exists x\ \exists y\ (Py \wedge Rxy)$

q) $\forall x\ Rxx$

r) $\forall x\ \forall y\ Rxy$

s) $\forall x\ \exists y\ (Rxy \wedge Py)$

t) $\exists y\ \forall x\ (Rxy \wedge Py)$

u) $\forall x\ (Px \rightarrow Rxa)$

4) Indique o significado formal das seguintes sentenças:

a) $\forall x\ ((A^1x \wedge B^1x) \leftrightarrow C^1x)$

b) $\neg\ \exists x\ (A^1x \vee B^1x)$

c) $\exists x\ (A^1x \wedge (B^1x \vee C^1x))$

d) $\forall x\ ((A^1x \wedge B^1x) \rightarrow C^1x)$

e) $\neg\ \forall x\ ((A^1x \vee B^1x) \rightarrow (B^1x \vee C^1x))$

5) Seja I uma interpretação qualquer e convencionemos indicar por c^* aquilo que I associa a uma constante não lógica c (assim, por exemplo, a^* é I(a), P^* é I(P), etc.). Formule uma sentença da linguagem formal cujo significado formal seja:

a) o domínio de R^* está contido em P^*;

b) a intersecção do domínio de R^* com P^* é vazia;

c) o contradomínio de R^* é igual a P^*;

d) se P^* não é vazio, então a^* pertence a P^*;

e) P^* não está contido no domínio de R^*;

f) há dois objetos que pertencem a P^*;

g) P^* tem, no mínimo, dois elementos;

h) P^* tem exatamente dois elementos;

i) P^* tem, no máximo, um elemento;

j) o universo tem um único elemento;

l) o universo tem, no mínimo, dois elementos;

m) o universo tem, no máximo, dois elementos;

n) o universo tem exatamente dois elementos;

o) o universo tem, no máximo, um elemento;

p) o universo tem, no mínimo, um elemento;

q) a relação R^* é reflexiva;

r) a relação R^* é simétrica.

13. Sentenças válidas

1) Nos exemplos abaixo, verifique se as sentenças são ou não válidas. Justifique suas respostas: com um argumento, no caso da sentença em questão ser válida; com uma interpretação que a falsifique, caso ela não seja válida.

a) $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$
b) $(\forall x Fx \rightarrow \neg\ \exists x\ (\neg\ Fx \wedge \neg\ Gx))$
c) $(\neg\ \exists x\ Fx \rightarrow \forall x\ (Fx \rightarrow Gx))$
d) $(\forall x\ \forall y\ x{=}y \rightarrow (\forall x\ Fx \vee \forall x \neg\ Fx))$
e) $(\forall x\ Rxx \rightarrow \forall x\ \forall y\ Rxy)$
f) $(\forall x\ (Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\neg\ \exists x\ Fx \rightarrow \neg\ \exists x Gx))$
g) $(\forall x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow Ryx) \rightarrow \forall x\ Rxx)$
h) $(\exists x\ \forall y\ x{=}y \rightarrow \forall x\ \forall y\ x{=}y)$
i) $(\exists x\ \forall y\ Rxy \rightarrow \forall x\ \forall y\ Rxy)$
j) $\forall x\ \exists y\ f^1 x{=}y$

2) Quais das sentenças abaixo são válidas? Justifique.

a) $(\exists x\ (\forall y\ Rxy \wedge \forall y\ Ryx) \rightarrow \forall x\ \forall y\ Rxy)$
b) $(\forall x\ (\exists y \neg\ x{=}y \rightarrow \exists y\ Rxy) \rightarrow \exists x\ \exists y\ Rxy)$
c) $(\forall x\ \forall y\ (Rxy \vee Ryx) \rightarrow \exists x\ \exists y\ Rxy)$

3) Mostre que as sentenças abaixo *não* são válidas.

a) $(\exists x\ Fx \rightarrow Fa)$
b) $((\exists x\ Fx \wedge \exists x\ Gx) \rightarrow \exists x\ (Fx \wedge Gx))$
c) $(\forall x\ (Fx \vee Gx) \rightarrow (\forall x\ Fx \vee \forall x\ Gx))$
d) $((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg\ P \rightarrow \neg\ Q))$
e) $(\forall x\ \exists y\ Rxy \rightarrow \exists y\ \forall x\ Rxy)$

4) Mostre que as sentenças abaixo são válidas.

a) $(Fa \rightarrow \exists x\ Fx)$
b) $(\exists x\ (Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x\ Fx \wedge \exists x\ Gx))$
c) $((\forall x\ Fx \vee \forall x\ Gx) \rightarrow \forall x\ (Fx \vee Gx))$
d) $((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg\ Q \rightarrow \neg\ P))$
e) $(\exists y\ \forall x\ Rxy \rightarrow \forall x\ \exists y\ Rxy)$

14. Consistência, compatibilidade e conseqüência

1) Mostre que os conjuntos de sentenças abaixo são consistentes.

a) $\{\forall x\, \exists y\, Rxy, \neg \exists x\, Rxx, \exists x\, \exists y\, \forall z\, (z=x \vee z=y)\}$

b) $\{\forall x\, (\exists y\, Rxy \rightarrow Fx), \forall x\, (\exists y\, Ryx \rightarrow \neg Fx), \forall x\, \exists y \neg Rxy\}$

c) $\{\forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow \neg Ryx), \forall x \neg Rxx, \exists x\, \exists y\, \forall z\, (z=x \vee z=y), \exists x\, \exists y\, (\neg x=y \wedge Rxy)\}$

2) Mostre que o conjunto de sentenças $\{\forall x\, (\exists y\, Rxy \rightarrow Fx), \forall x\, (\exists y\, Rxy \rightarrow \neg Fx), \forall x\, \exists y\, Rxy\}$ é inconsistente.

3) Seja G o seguinte conjunto:

$\Gamma = \{\forall x\, (\exists y\, Fxy \rightarrow \forall y\, Gyx), \forall x\, \forall y\, ((Jx \wedge Hy) \leftrightarrow Gxy), \forall x \neg Gxx\}$

Quais das sentenças abaixo são conseqüência de Γ, quais não são? Justifique adequadamente cada uma de suas respostas.

a) $\neg \exists x\, Jx$

b) $\exists x\, Hx$

c) $\forall x\, (Jx \rightarrow Hx)$

d) $\forall x\, \forall y \neg Fxy$

e) $\forall x\, \forall y\, (Gxy \rightarrow \neg x=y)$

f) $\forall x\, (Jx \vee Hx)$

4) Nos exemplos abaixo, verifique se os conjuntos de sentenças Γ são consistentes. Justifique suas respostas: com um modelo de Γ, se Γ for consistente; com um argumento, se Γ for inconsistente.

a) $\Gamma = \{\forall x\, (\exists y\, Rxy \rightarrow \exists y\, Ryx), \forall x\, (Rxa \rightarrow x=a), \exists x \exists y\, Rxy\}$

b) $\Gamma = \{\forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow x=y), \exists x\, \forall y\, Rxy, \exists x\, \exists y \neg x=y\}$

c) $\Gamma = \{\forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow (Gx \wedge Hy)), \neg \exists x\, (Gx \wedge Hx), \exists x\, \exists y\, Rxy\}$

d) $\Gamma = \{(\exists x\, Fx \rightarrow \forall x\, Gx), \forall x\, (Gx \rightarrow Hx), \forall x\, (Hx \rightarrow Fx), \exists x\, Gx\}$

e) $\Gamma = \{\neg \exists x\, \exists y\, (Rxy \wedge Ryx), \forall x\, \forall y\, (\neg x=y \rightarrow (Rxy \vee Ryx))\}$

5) Para cada um dos conjuntos Γ do exercício 4):

a) dê exemplo de uma sentença que seja conseqüência de Γ;

b) se Γ for consistente, dê exemplo de uma sentença que não seja conseqüência de Γ.

6) Nos exemplos abaixo, verifique se a sentença α é conseqüência do conjunto de sentenças Γ.

a) $\Gamma = \{\forall x\, (Rxx \rightarrow (Gx \vee Fx)), (\exists x\, Gx \rightarrow \exists x\, Fx), \exists x\, \forall y\, Rxy\}$

$\alpha = \exists x\, Fx$

b) $\Gamma = \{\forall x\, (Fx \rightarrow Gx), \forall x\, (Gx \rightarrow Fx), \forall x\, \forall y\, ((Fx \wedge Gy) \rightarrow Rxy)\}$

$\alpha = \exists x\, \exists y\, Rxy$

c) $\Gamma = \{\exists x\, \forall y \neg Rxy, \forall x\, \forall y\, ((Fx \wedge Gy) \rightarrow Rxy), \forall x\, Fx\}$

$\alpha = \neg \exists y\, Gy$

d) $\Gamma = \{\forall x\, (Fx \rightarrow (x=a \vee x=b)), \exists x\, \exists y\, (\neg x=y \wedge \neg Fx)\}$

$\alpha = \exists x\, Fx$

7) Seja Γ o conjunto:

$\Gamma = \{\forall x\ \forall y\ (Sxy \rightarrow \neg\ x=y),\ \exists x\ (Fx \wedge Sxa),\ \exists x\ (Fx \wedge Sax),\ \forall x\ \forall y\ (Sxy \rightarrow \neg\ Syx)\}$.

7.1) Quais das sentenças abaixo são compatíveis com Γ? Justifique.

a) $\forall x\ \forall y\ x=y$
b) $\exists x\ \exists y\ Sxy$
c) $\neg\ \exists x\ \exists y\ Sxy$
d) $\forall x\ (Sxa \rightarrow Fx)$

7.2) Quais das sentenças abaixo são conseqüências de Γ? Justifique.

a) $\exists x\ \exists y\ \neg\ Sxy$
b) $\forall x\ \forall y\ \neg\ Sxy$
c) $\forall x\ \neg\ Sxx$
d) $\neg\ \exists x\ Fx$

8) Seja Γ o seguinte conjunto:

$\Gamma = \{\forall x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow \neg\ x=y),\ \exists x\ \forall y\ \neg\ Rxy,\ \exists x\ \exists y\ Rxy,\ \forall x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow \neg\ Ryx)\}$.

a) Mostre que Γ é consistente.
b) Dê exemplo de uma sentença não válida que é conseqüência de Γ.
c) Dê exemplo de uma sentença não inconsistente que não é conseqüência de Γ.

9) Seja Γ o seguinte conjunto:

$\Gamma = \{\forall x\ \forall y\ ((x=a \vee y=b) \rightarrow \neg\ Rxy),\ \neg\ \exists x\ \forall y\ Rxy,\ \forall x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow \neg\ Ryx)\}$.

a) Mostre que Γ é consistente.
b) Dê exemplo de uma sentença consistente que não seja conseqüência de Γ.
c) Dê exemplo de uma sentença consistente incompatível com Γ.

10) Seja Γ o seguinte conjunto:

$\Gamma = \{\forall x\ (Fx \vee Gx),\ \neg\ \exists x\ Rxx,\ \forall x\ (Fx \rightarrow \forall y\ (Rxy \rightarrow Ryx)),\ \neg\ \forall x\ Gx\}$.

10.1) Γ é consistente? Justifique.

10.2) Determine, em cada caso, se a sentença α é conseqüência de Γ:

a) $\alpha = \forall x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow Ryx)$
b) $\alpha = \exists x\ \exists y\ (\neg\ x=y \wedge Rxy)$

10.3) Determine, em cada caso, se a sentença α é compatível com Γ:

a) $\alpha = \neg\ \exists x\ \exists y\ Rxy$
b) $\alpha = \forall x\ \forall y\ x=y$

11) Seja $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, onde:

$\alpha_1 = \forall x\ (Fx \leftrightarrow \forall y\ Rxy)$
$\alpha_2 = \exists x\ \forall y\ \neg\ Rxy$
$\alpha_3 = \forall x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow (Gx \wedge Gy))$

Para cada uma das sentenças abaixo, responda:

a) se a sentença é compatível com Γ;
b) se a sentença é conseqüência de Γ.

i) $\forall x\ \forall y\ Rxy$
ii) $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$
iii) $\exists x\ \exists y\ (\neg\ x=y \wedge Rxy)$
iv) $\exists x \neg Fx$
v) $\exists x\ \exists y\ (\neg\ Rxy \wedge Gx)$
vi) $\forall x\ \forall y \neg Rxy$

12) Seja $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, onde

$\alpha_1 = \exists x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow Fy)$
$\alpha_2 = \forall x\ \forall y\ ((Rxy \wedge Fy) \rightarrow x=y)$
$\alpha_3 = \forall x\ Rxa$

Para cada uma das sentenças abaixo, responda:

a) se a sentença é compatível com Γ;
b) se a sentença é conseqüência de Γ.

i) $\forall x\ Fx$
ii) $\neg\ \exists x\ \exists y\ Rxy$
iii) $(\exists x\ Fx \rightarrow \forall x\ \forall y\ x=y)$
iv) $\neg\ \exists x\ Fx$
v) $(\forall x\ \forall y\ Rxy \rightarrow \forall x\ Fx)$
vi) $\exists x\ \forall y \neg Rxy$

13) Seja $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, onde

$\alpha_1 = \exists x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow \neg\ x=y)$
$\alpha_2 = \forall x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow (Fx \wedge Gy))$
$\alpha_3 = \forall x\ (Fx \rightarrow (Gx \vee Rxx))$

Para cada uma das sentenças abaixo, responda:

a) se a sentença é compatível com Γ;
b) se a sentença é conseqüência de Γ.

i) $\forall x\ \forall y\ Rxy$
ii) $\forall x\ \exists y\ Rxy$
iii) $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$
iv) $(Fb \rightarrow \exists x \neg\ x=b)$
v) $\exists x\ \exists y\ (Rxy \wedge x=y)$
vi) $\forall x\ \forall y \neg Rxy$

14) Considere os conjuntos de sentenças abaixo:

$\Gamma_1 = \{(Fa \rightarrow \exists x\ Gx), (Ga \vee Ha), (Ga \leftrightarrow a=b), \neg\ (a=b \vee a=c)\}$
$\Gamma_2 = \{(\exists x\ Gx \rightarrow \forall x\ (Hx \rightarrow Fx)), \forall x\ (Gx \leftrightarrow Hx), Ha\}$
$\Gamma_3 = \{\forall x\ (\exists y\ Rxy \leftrightarrow \exists y\ Syx), \forall x\ \forall y\ (Rxy \vee Sxy), \forall x \neg Rxx, \forall x\ \forall y\ (Sxy \rightarrow \neg\ Rxy)\}$
$\Gamma_4 = \{\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \forall x \neg Rxx, \exists x\ \exists y\ Rxy\}$
$\Gamma_5 = \{(\exists x\ \forall y\ Rxy \leftrightarrow \neg\ \forall x\ Rxx), \neg\ \forall y\ \exists x\ Rxy\}$
$\Gamma_6 = \{\forall x\ (Fx \rightarrow \exists y\ Rxy), \forall x\ (Gx \rightarrow \exists y\ Rxy), \forall x\ (Fx \vee Gx), \exists x\ \forall y \neg Rxy\}$
$\Gamma_7 = \{\neg\ \forall x\ Rxx, (\forall x\ Rxx \leftrightarrow \neg\ Fa), \neg\ (Ga \rightarrow Fa)\}$
$\Gamma_8 = \{\forall x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow Ryx), \forall x\ \forall y\ (Rxy \rightarrow \neg\ x=y), \forall x\ \exists y\ Rxy\}$

a) Determine se os conjuntos acima apresentados são ou não consistentes.
b) Determine se esses conjuntos são funcional-veritativamente consistentes.
c) Para cada um dos conjuntos, dê exemplo:
i) de uma sentença que seja conseqüência do conjunto;
ii) de uma sentença que seja conseqüência tautológica do conjunto.

15) Nos casos abaixo, indique se a sentença α é conseqüência do conjunto de sentenças Γ.

a) $\Gamma = \{\exists x\, \exists y\, H^2xy, \neg \exists x\, F^1x, \forall x\, (H^2xa \rightarrow F^1x)\}$
$\alpha = \neg \exists x\, H^2xa$
b) $\Gamma = \{\exists x\, G^1x, \forall x\, (G^1x \rightarrow \exists y\, H^2xy), \exists x\, \exists y \neg H^2xy\}$
$\alpha = \exists x\, \exists y\, H^2xy$
c) $\Gamma = \{\forall x\, (F^1x \vee G^1x), \exists x \neg F^1x, \forall x\, (G^1x \rightarrow H^2xa)\}$
$\alpha = \exists x\, H^2xa$

16) Indique se os conjuntos abaixo são consistentes.

a) $\{\forall x\, (F^1x \rightarrow \exists y\, H^2xy), \exists x\, F^1x, \exists x\, \forall y \neg H^2xy\}$
b) $\{\forall x\, \exists y\, H^2xy, \forall x\, (H^2xa \rightarrow \exists y \neg a=y), \exists x\, \exists y\, (H^2xy \wedge a=y)\}$

17) Considere as sentenças abaixo:

$\alpha_1 = \forall x\, (Fx \vee Gx)$
$\alpha_2 = \exists x\, Fx$
$\alpha_3 = \exists x\, \forall y\, x=y$
$\alpha_4 = \exists x\, \exists y\, \forall z\, (x=z \vee y=z)$
$\alpha_5 = \exists x\, \exists y\, (\neg x=y \wedge \forall z\, (x=z \vee y=z))$
$\alpha_6 = \forall x \neg Rxx$
$\alpha_7 = \exists x\, \forall y\, Rxy$
$\alpha_8 = \exists x\, \exists y\, (\neg x=y \wedge Rxy)$
$\alpha_9 = \forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow Ryx)$
$\alpha_{10} = \forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$
$\alpha_{11} = \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
$\alpha_{12} = \forall x\, \forall y\, ((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x=y)$
$\alpha_{13} = \exists x\, \forall y\, f^1x=y$
$\alpha_{14} = \exists x\, \exists y\, \exists z\, ((f^1x=y \wedge f^1y=z) \wedge f^1z=x)$
$\alpha_{15} = \forall x\, \exists y\, Rxy$
$\alpha_{16} = \forall x\, (Fx \rightarrow \exists y\, Rxy)$
$\alpha_{17} = \neg \exists x\, \exists y\, Rxy$
$\alpha_{18} = \forall x\, Gx$
$\alpha_{19} = \exists x \neg Gx$
$\alpha_{20} = \exists x \neg Fx$

17.1) Mostre que cada uma das sentenças acima tem um modelo.

17.2) Determine se os conjuntos abaixo são consistentes. Justifique a resposta.

a) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{18}\}$
b) $\{\alpha_3, \alpha_4\}$
c) $\{\alpha_3, \alpha_5\}$
d) $\{\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{15}\}$

e) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, \alpha_{16}, \alpha_{20}\}$

f) $\{\alpha_5, \alpha_{13}, \alpha_{14}\}$

g) $\{\alpha_9, \alpha_{10}\}$

h) $\{\alpha_1, \alpha_{16}, \alpha_{17}\}$

i) $\{\alpha_1, \alpha_{16}, \alpha_{17}, \alpha_{19}\}$

j) $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_{20}\}$

l) $\{\alpha_7, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{16}\}$

17.3) As afirmações abaixo são verdadeiras? Justifique a resposta.

a) α_6 é conseqüência de $\{\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{15}\}$.

b) α_{18} é conseqüência de $\{\alpha_1, \alpha_5, \alpha_{16}, \alpha_{17}\}$.

c) α_{17} é conseqüência de $\{\alpha_9, \alpha_{10}\}$.

d) α_{20} é conseqüência de $\{\alpha_3, \alpha_5\}$.

e) $\neg\, \alpha_3$ é conseqüência de $\{\alpha_6, \alpha_{15}\}$.

17.4) Dê exemplo de sentença (não necessariamente acima relacionada) que não seja conseqüência de:

a) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{19}, \alpha_{15}\}$

b) $\{\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}\}$

18) Seja Γ o conjunto seguinte:

$\Gamma = \{\forall x\, (Fx \rightarrow \exists y\, (Fy \wedge \neg\, x{=}y)),\ \forall x\, (Fx \vee Gx),\ \exists x\, \forall y\, (Gy \rightarrow x{=}y)\}$.

a) Mostre que Γ é consistente.

b) Quantos objetos, no mínimo, deverão existir no universo de um modelo de Γ?

c) Em cada caso, abaixo, diga: i) se a sentença α é conseqüência de Γ; ii) se α é compatível com Γ.

i) $\alpha = \exists x\, (Fx \wedge \neg\, Gx)$

ii) $\alpha = \forall x\, (Fx \rightarrow Gx)$

iii) $\forall x\, Fx$

iv) $\exists x\, \neg\, Fx$

v) $\forall x\, (Fx \leftrightarrow Gx)$

vi) $\neg\, \exists x\, Fx$

15. Tautologias

§4.3 1) Sejam:

$\alpha_1 = ((A \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B))$

$\alpha_2 = ((\neg\, B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\, A))$

$\alpha_3 = ((A \vee B) \vee (A \vee \neg\, C))$

$\alpha_4 = ((A \wedge B) \vee \neg\, A)$

$\alpha_5 = ((A \vee \neg\, \neg\, B) \rightarrow (C \rightarrow (A \rightarrow B)))$

$\alpha_6 = ((\neg\, A \rightarrow B) \rightarrow \neg\, (A \wedge B))$

D) Entre as sentenças acima existem tautologias? Justifique, as respostas

Suplem.
~~Complementares~~

2) Sejam:

$\alpha_1 = ((\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B)))$
$\alpha_2 = ((A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg C \rightarrow B) \rightarrow B))$
$\alpha_3 = (A \rightarrow ((B \wedge \neg B) \rightarrow \neg A))$
$\alpha_4 = ((A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow \neg B)$
$\alpha_5 = ((C \rightarrow (B \rightarrow \neg C)) \wedge (A \rightarrow C))$
$\alpha_6 = (((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow A)$

Entre as sentenças acima existem tautologias? Justifique.

3) Quais das sentenças abaixo são tautologias? Justifique.

$\alpha_1 = (\neg (B \leftrightarrow (C \vee \neg B)) \vee (C \rightarrow B))$
$\alpha_2 = (((\neg A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \vee A))$
$\alpha_3 = ((P \leftrightarrow (R \vee S)) \rightarrow (P \vee (R \rightarrow \neg S)))$

§4. 4) Considere as sentenças abaixo:

~~$\alpha_1 = ((\neg \forall x\, Fx \rightarrow \exists y\, Gy)\ (Fa \wedge \neg \forall x\, Gx)\ (Fa \rightarrow \forall x\, Fx))$~~
$\alpha_2 = ((\forall x\, \forall y\, Rxy \wedge \neg \exists x\, (Fx \wedge Gx)) \rightarrow (\forall x\, \forall y\, Rxy \rightarrow \exists x\, Fx))$
$\alpha_3 = (((Fa \wedge \neg \forall x\, Gx) \vee (Ga \wedge \forall x\, Gx)) \rightarrow \forall x\, (Ga \rightarrow Fx))$
$\alpha_4 = (\neg (\forall x\, \forall y\, Rxy \leftrightarrow \forall x\, (Fa \rightarrow Fx)) \rightarrow (Fa \vee \neg \forall x\, \forall y\, Rxy))$
$\alpha_5 = (\exists x\, Fx \rightarrow \neg (Rab \vee \forall x\, Fx)) \rightarrow (Rab \rightarrow (\neg \exists x\, Fx \vee \neg \forall x\, Fx))$

Para cada uma delas,

a) encontre os componentes básicos,
b) dê exemplo de uma sentença CS-associada,
c) verifique se é ou não uma tautologia.

§4. 5) Dê exemplo de:

a) uma sentença tautológica, cujos componentes básicos ~~são:~~ sejam:
$\forall x\, (Fx \rightarrow Gx)$, $\exists x\, (Fx \wedge \neg Gx)$;

b) uma sentença não-tautológica, cujos componentes básicos ~~são:~~ sejam:
$\exists x\, Gx$, $\exists x \neg Gx$, $\forall x\, (Fx \rightarrow Gx)$, $\forall x\, Fx$;

c) uma sentença válida, mas não-tautológica, cujos componentes básicos ~~são:~~ sejam:
$\forall x\, Gx$, $\forall x \neg Gx$.

Suplem.

6) Verifique se as sentenças abaixo são ou não tautológicas:

a) $\forall x\, (Fx \rightarrow Gx)$
b) $(\forall x Fx \rightarrow \neg \exists x\, (\neg Fx \wedge \neg Gx))$
c) $(\neg \exists x\, Fx \rightarrow \forall x\, (Fx \rightarrow Gx))$
d) $(\forall x\, \forall y\, x=y \rightarrow (\forall x\, Fx \vee \forall x \neg Fx))$
e) $(\forall x\, Rxx \rightarrow \forall x\, \forall y\, Rxy)$
f) $(\forall x\, (Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\neg \exists x\, Fx \rightarrow \neg \exists x Gx))$
g) $(\forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow Ryx) \rightarrow \forall x\, Rxx)$
h) $(\exists x\, \forall y\, x=y \rightarrow \forall x\, \forall y\, x=y)$
i) $(\exists x\, \forall y\, Rxy \rightarrow \forall x\, \forall y\, Rxy)$
j) $\forall x\, \exists y\, f'x=y$

16. Consistência funcional veritativa

§4.6 1) Sejam:

$\alpha_1 = ((A \to (B \leftrightarrow C)) \to (A \wedge B))$
$\alpha_2 = ((\neg B \to A) \to (\neg B \to \neg A))$
$\alpha_3 = ((A \vee B) \vee (A \vee \neg C))$
$\alpha_4 = ((A \wedge B) \vee \neg A)$
$\alpha_5 = ((A \vee \neg\neg B) \to (C \to (A \to B)))$
$\alpha_6 = ((\neg A \to B) \to \neg (A \wedge B))$
$\alpha_7 = ((A \to (B \to C))$
$\alpha_8 = ((A \to B) \wedge (A \wedge \neg C))$

Quais desses conjuntos são funcional-veritativamente consistentes?

a) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}$
b) $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$
c) $\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$
d) $\{\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$

2) Sejam:

$\alpha_1 = ((\neg A \vee B) \to (A \to (C \to B)))$
$\alpha_2 = ((A \to B) \to ((\neg C \to B) \to B))$
$\alpha_3 = (A \to ((B \wedge \neg B) \to \neg A))$
$\alpha_4 = ((A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow \neg B)$
$\alpha_5 = ((C \to (B \to \neg C)) \wedge (A \to C))$
$\alpha_6 = (((A \to \neg B) \to \neg\neg A) \to A)$
$\alpha_7 = (\neg A \to \neg B)$
$\alpha_8 = ((\neg A \to B) \wedge (\neg A \wedge C))$

Quais desses conjuntos são funcional-veritativamente consistentes?

a) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_8\}$
b) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_7\}$
c) $\{\alpha_2, \alpha_5, \alpha_6\}$
d) $\{\alpha_5, \alpha_7, \alpha_8\}$

§4.7 3) Considere os seguintes conjuntos de sentenças:

a) $\Gamma = \{((\exists x \exists y\, Rxy \to \forall x\, (Rxa \to x{=}a)) \to \exists x \exists y\, Rxy), \forall x\, (\exists y\, Rxy \to \exists y\, Ryx), \neg \exists x \exists y\, Rxy\}$
b) $\Gamma = \{\forall x\, \forall y\, (Rxy \to x{=}y), \exists x\, \forall y\, Rxy, \exists x\, \exists y \neg x{=}y\}$
c) $\Gamma = \{\forall x\, \forall y\, (Rxy \to (Gx \wedge Hy)), \neg \exists x\, (Gx \wedge Hx), \exists x\, \exists y\, Rxy\}$
d) $\Gamma = \{(\exists x\, Fx \to \forall x\, Gx), (\forall x\, Gx \to \forall x\, (Gx \to Hx)), \neg ((\exists x\, Fx \vee \forall x\, Gx) \to \forall x\, (Gx \to Hx))\}$
e) $\Gamma = \{\neg \exists x\, \exists y\, (Rxy \wedge Ryx), \forall x\, \forall y\, (\neg x{=}y \to (Rxy \vee Ryx))\}$

Determine se são ou não funcional-veritativamente consistentes.

17. Dedução/teoremas

1) Em cada um dos itens abaixo, construa uma dedução da sentença α a partir do conjunto de sentenças Γ. (Observe que, para tanto, somente as regras P, T e C serão necessárias.)

a) $\Gamma = \{(P \to W), (P \vee C), (C \to \neg I), I\}$
$\alpha = W$

b) $\Gamma = \{((W \vee P) \to I), (I \to (C \vee S)), (S \to U), (\neg C \wedge \neg U)\}$
$\alpha = \neg W$

c) $\Gamma = \{((\neg C \vee P) \to \neg W), ((A \wedge B) \to W), B, (A \vee \neg B), ((\neg P \wedge A) \to S)\}$
$\alpha = S$

d) $\Gamma = \{(\neg D \vee N), (J \to A), ((N \wedge A) \to S), (\neg (N \wedge D) \vee J)\}$
$\alpha = D \to S$

e) $\Gamma = \{(\exists x\, Sx \vee \forall x\, Ox), (\exists x\, Sx \to \forall x\, Px), (\forall x\, Ox \to \exists x\, Mx)\}$
$\alpha = (\forall x\, Px \vee \exists x\, Mx)$

f) $\Gamma = \{(\forall x\, Jx \to \neg \exists x\, Nx), (\neg \forall x\, Jx \to \forall x\, Dx), (\forall x\, Dx \to \exists x\, Ax), (\exists x\, Rx \to \exists x\, Nx)\}$
$\alpha = (\neg \exists x\, Rx \vee \exists x\, Ax)$

g) $\Gamma = \{(\forall x\, (Fx \to Gx) \to (\exists x\, Hx \vee \forall x\, \exists y\, Mxy)), (\exists x\, Hx \to \neg \forall x\, (Fx \to Gx)),$
$(\exists x\, \exists y\, (Sx \wedge Ry) \to \neg \forall x\, \exists y\, Mxy)\}$
$\alpha = (\forall x\, (Fx \to Gx) \to \neg \exists x\, \exists y\, (Sx \wedge Ry))$

h) $\Gamma = \{(\neg \exists x\, Hx \to \forall x\, Fx), (\forall x\, Fx \to \neg \forall x\, \exists y\, Rxy), (\forall x\, \exists y\, Rxy \vee \exists x\, \exists y\, Mxy),$
$\neg \exists x\, \exists y\, Mxy\}$
$\alpha = \exists x\, Hx$

2) Demonstre os seguintes teoremas:

a) $\forall x\, (Fx \to Gx) \to (\forall x\, \neg Gx \to \forall x\, \neg Fx)$
b) $\forall x\, ((Fx \wedge Gx) \to Hx) \to (\forall x\, Gx \to \forall x\, (Fx \to Hx))$
c) $\forall x\, (Fx \to (Gx \wedge Hx)) \to (\forall x\, (Fx \to Gx) \wedge \forall x\, (Fx \to Hx))$

3) Deduza a sentença α a partir do conjunto de sentenças Γ:

a) $\Gamma = \{\forall x\, (Fx \to Gx), \forall x\, Fx\}$
$\alpha = \exists x\, Gx$

b) $\Gamma = \{\forall x\, (Fx \to Gx), \forall x\, (Gx \to Hx), \neg Ha\}$
$\alpha = \exists x\, \neg Fx$

c) $\Gamma = \{(Ha \to \forall x\, Fx), \forall x\, (Fx \to Gx)\}$
$\alpha = (Ha \to Ga)$

d) $\Gamma = \{\exists x\, Fx, \forall x\, (Fx \to Gx)\}$
$\alpha = \exists x\, Gx$

e) $\Gamma = \{\forall x\, \forall y\, (Fxy \to Fyx), \forall x\, \exists y\, Fxy\}$
$\alpha = \exists x\, \exists y\, (Fxy \wedge Fyx)$

f) $\Gamma = \{\exists x\, \exists y\, Fxy, \forall x\, \forall y\, (Fxy \to Fxx)\}$
$\alpha = \exists x\, Fxx$

5 4) Se a sentença α é conseqüência do conjunto de sentenças Γ, deduza α a partir de Γ. Caso contrário, dê um modelo de Γ que falsifique α.

a) $\Gamma = \{\forall x\, \forall y\, (Fxy \rightarrow Fyx), \exists x\, \forall y\, Fxy\}$
$\alpha = \exists x\, Fxx$

b) $\Gamma = \{\forall x\, \forall y\, (Fxy \rightarrow Fyx), \exists x\, \exists y\, Fxy\}$
$\alpha = \exists x\, Fxx$

c) $\Gamma = \{\forall x\, (Fx \rightarrow (Gx \vee Hx)), \exists x\, (Fx \wedge \neg Gx)\}$
$\alpha = \exists x\, (Fx \wedge Hx)$

d) $\Gamma = \{\forall x\, ((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \exists x\, (Fx \wedge \neg Gx)\}$
$\alpha = \exists x\, (Fx \wedge Hx)$

e) $\Gamma = \{\forall x\, (Fx \vee Gx), \forall x\, (Hx \rightarrow \neg Gx), \exists x\, Hx\}$
$\alpha = \exists x\, Fx$

f) $\Gamma = \{\forall x\, (Fx \vee Gx), \forall x\, (\neg Hx \rightarrow Gx), \exists x\, Hx\}$
$\alpha = \exists x\, Fx$

g) $\Gamma = \{(\forall x\, Fx \rightarrow \forall x\, Gx), (Fa \rightarrow \exists x \neg Gx)\}$
$\alpha = \neg \forall x\, Gx$

h) $\Gamma = \{(\forall x\, Fx \rightarrow \forall x\, Gx), (Fa \rightarrow \exists x \neg Gx)\}$
$\alpha = \neg \forall x\, Fx$

6 5) Se a sentença α for válida, demonstre-a como teorema. Caso contrário, dê exemplo de uma interpretação que a falsifique.

a) $\alpha = \forall x\, Fx \rightarrow (\exists y\, Gy \rightarrow \exists x\, (Fx \wedge Gx))$
b) $\alpha = \forall x\, \forall y\, (Fxy \rightarrow \neg Fyx) \rightarrow \forall x \neg Fxx$
c) $\alpha = \forall x \neg Fxx \rightarrow \forall x\, \forall y\, (Fxy \rightarrow \neg Fyx)$
d) $\alpha = \forall x\, \forall y\, (Fxy \rightarrow Fyx) \rightarrow (\exists x\, Fxa \rightarrow \exists x\, Fax)$
e) $\alpha = \forall x\, Fxa \rightarrow \exists x\, \exists y\, Fxy$
f) $\alpha = \exists x\, Fxa \rightarrow \exists x\, \exists y\, Fxy$
g) $\alpha = \exists x\, (\forall y\, Fxy \wedge \forall y\, Fyx) \rightarrow \forall x\, \forall y\, Fxy$
h) $\alpha = \exists x\, \forall y\, Fxy \rightarrow \forall y\, \exists x\, Fxy$

8 6) Demonstre os seguintes teoremas:

a) $\forall x\, (Fx \leftrightarrow \exists y\, (x=y \wedge Fy))$
b) $\forall x\, \forall y\, (x=y \rightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$
c) $\forall x\, \forall y\, ((Fx \wedge x=y) \leftrightarrow (Fy \wedge x=y))$

9 7) Se a sentença α é conseqüência do conjunto de sentenças Γ, deduza α a partir de Γ. Caso contrário, dê um modelo de Γ que falsifique α.

a) $\Gamma = \{\exists x\, \forall y\, (Fx \leftrightarrow x=y), \forall x\, Gx\}$
$\alpha = \exists x\, (Fx \wedge Gx)$

b) $\Gamma = \{\exists x\, \forall y\, (Fx \leftrightarrow x=y)\}$
$\alpha = \exists x\, Fx$

c) $\Gamma = \{\exists x\, \forall y\, (Fx \leftrightarrow x=y)\}$
$\alpha = \exists x \neg Fx$

d) $\Gamma = \{\exists x\, \forall y\, (Fx \leftrightarrow x=y)\}$
$\alpha = \exists x\, \forall y\, x=y$

e) $\Gamma = \{\exists x\, \forall y\, (Fx \leftrightarrow x=y)\}$
$\alpha = \forall x\, Fx$

4 8) Deduza a sentença α a partir do conjunto Γ de sentenças:

a) $\Gamma = \{\forall x\, \forall y\, (x=y \rightarrow \neg Sxy), \forall x\, (\neg Fx \rightarrow Sxa)\}$
$\alpha = \exists x\, Fx$

b) $\Gamma = \{\exists x\, (Fx \wedge \neg Hx), \forall x\, (Fx \rightarrow (Hx \vee Gx))\}$
$\alpha = \exists x\, Gx$

2 9) Complete e justifique os passos das deduções abaixo:

a)

{1}	(1) $\forall x\, Fx$
	(2) Fa
{3}	(3) $\forall x \neg Fx$
	(4) $\neg Fa$
	(5) $\forall x \neg Fx \rightarrow \neg Fa$
	(6) $\neg \forall x \neg Fx$
	(7) $\exists x\, Fx$
	(8) $\forall x\, Fx \rightarrow \exists x\, Fx$

b)

{1}	(1) $\forall x\, (P \rightarrow Fx)$
	(2) $P \rightarrow Fa$
{3}	(3) P
	(4) Fa
	(5) $\forall x\, Fx$
	(6) $P \rightarrow \forall x\, Fx$
	(7) $\forall x\, (P \rightarrow Fx) \rightarrow (P \rightarrow \forall x\, Fx)$
{8}	(8) $P \rightarrow \forall x\, Fx$
{9}	(9) P
	(10) $\forall x\, Fx$
	(11) Fa
	(12) $P \rightarrow Fa$
	(13) $\forall x\, (P \rightarrow Fx)$
	(14) $(P \rightarrow \forall x\, Fx) \rightarrow \forall x\, (P \rightarrow Fx)$
	(15) $\forall x\, (P \rightarrow Fx) \leftrightarrow (P \rightarrow \forall x\, Fx)$

c)

{1}	(1) $\exists x\, (\neg Gx \wedge Hx)$
{2}	(2) $\neg Ga \wedge Ha$
	(3) Ha
{4}	(4) $\forall x \neg Hx$
	(5) $\neg Ha$
	(6) $\forall x \neg Hx \rightarrow \neg Ha$
	(7) $\neg \forall x \neg Hx$
	(8) $\exists x\, Hx$
	(9) $(\neg Ga \wedge Ha) \rightarrow \exists x\, Hx$
{10}	(10) $\neg \exists x\, Hx$
	(11) $\neg (\neg Ga \wedge Ha)$
	(12) $\forall x \neg (\neg Gx \wedge Hx)$
	(13) $\neg \exists x\, Hx \rightarrow \forall x \neg (\neg Gx \wedge Hx)$
	(14) $\neg \forall x \neg (\neg Gx \wedge Hx)$
	(15) $\exists x\, Hx$

d)

{1}	(1) $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$
{2}	(2) $\exists x\ (Fx \wedge Hx)$
{3}	(3) $Fa \wedge Ha$
	(4) $Fa \rightarrow Ga$
	(5) $Ga \wedge Ha$
{6}	(6) $\forall x \neg (Gx \wedge Hx)$
	(7) $\neg (Ga \wedge Ha)$
	(8) $\forall x \neg (Gx \wedge Hx) \rightarrow \neg (Ga \wedge Ha)$
	(9) $\neg \forall x \neg (Gx \wedge Hx)$
	(10) $\exists x\ (Gx \wedge Hx)$
	(11) $(Fa \wedge Ha) \rightarrow \exists x\ (Gx \wedge Hx)$
{12}	(12) $\neg \exists x\ (Gx \wedge Hx)$
	(13) $\neg (Fa \wedge Ha)$
	(14) $\forall x \neg (Fx \wedge Hx)$
	(15) $\neg \exists x\ (Gx \wedge Hx) \rightarrow \forall x \neg (Fx \wedge Hx)$
	(16) $\neg \forall x \neg (Fx \wedge Hx)$
	(17) $\exists x\ (Gx \wedge Hx)$

e)

{1}	(1) $\forall x \neg Fxx$
	(2) $\neg Faa$
{3}	(3) $a=b$
{4}	(4) Fab
	(5) $a=a$
	(6) $b=a$
	(7) Faa
	(8) $a=b \rightarrow Faa$
	(9) $\neg a=b$
	(10) $Fab \rightarrow \neg a=b$
	(11) $\forall y\ (Fay \rightarrow \neg a=y)$
	(12) $\forall x \forall y\ (Fxy \rightarrow \neg x=y)$

f)

{1}	(1) $\forall x\ (\exists y\ Fxy \rightarrow \forall y\ Gyx)$
{2}	(2) $\forall x \neg Gxx$
	(3) $\exists y\ Fay \rightarrow \forall y\ Gya$
{4}	(4) $\exists y\ Fay$
	(5) $\forall y\ Gya$
	(6) Gaa
	(7) $\exists y\ Fay \rightarrow Gaa$
	(8) $\neg Gaa$
	(9) $\neg \exists y\ Fay$
{10}	(10) $\neg \forall y \neg Fay$
	(11) $\exists y\ Fay$
	(12) $\neg \forall y \neg Fay \rightarrow \exists y\ Fay$
	(13) $\forall y \neg Fay$
	(14) $\forall x \forall y \neg Fxy$

g)

{1}	(1) $\forall x\ Fx \vee \forall x Gx$
{2}	(2) $\forall x\ Fx$
	(3) Fa

(4) $Fa \vee Ga$
(5) $\forall x\ (Fx \vee Gx)$
{21} (6) $\forall x\ Fx \rightarrow \forall x\ (Fx \vee Gx)$
{7} (7) $\forall x\ Gx$
(8) Ga
(9) $Fa \vee Ga$
(10) $\forall x\ (Fx \vee Gx)$
(11) $\forall x\ Gx \rightarrow \forall x\ (Fx \vee Gx)$
(12) $\forall x\ (Fx \vee Gx)$
(13) $(\forall x\ Fx \vee \forall x\ Gx) \rightarrow \forall x\ (Fx \vee Gx)$

h)
{1} (1) $\forall x\ (Fx \rightarrow x=a)$
{2} (2) $\neg \exists x\ (Gx \wedge \neg x=b)$
{3} (3) $\forall x\ (Fx \vee Gx)$
{4} (4) $a=b$
{5} (5) $\neg \forall x \neg (Gx \wedge \neg x=b)$
(6) $\exists x\ (Gx \wedge \neg x=b)$
(7) $\neg \forall x \neg (Gx \wedge \neg x=b) \rightarrow \exists x\ (Gx \wedge \neg x=b)$
(8) $\forall x \neg (Gx \wedge \neg x=b)$
(9) $\neg (Gc \wedge \neg c=b)$
(10) $Fc \rightarrow c=a$
(11) $Fc \vee Gc$
(12) $c=a \vee c=b$
(13) $c=b \vee c=b$
(14) $c=b$
(15) $\forall x\ x=b$
{16} (16) $\forall y \neg \forall x\ x=y$
(17) $\neg \forall x\ x=b$
(18) $\forall y \neg \forall x\ x=y \rightarrow \neg \forall x\ x=b$
(19) $\neg \forall y \neg \forall x\ x=y$
(20) $\exists y\ \forall x\ x=y$

i)
{1} (1) $\exists x\ (Fx \vee Gx)$
{2} (2) $Fa \vee Ga$
{3} (3) Fa
{4} (4) $\forall x \neg Fx$
(5) $\neg Fa$
(6) $\forall x \neg Fx \rightarrow \neg Fa$
(7) $\neg \forall x \neg Fx$
(8) $\exists x\ Fx$
(9) $\exists x\ Fx \vee \exists x\ Gx$
(10) $Fa \rightarrow (\exists x\ Fx \vee \exists x\ Gx)$
{11} (11) Ga
→ {12} (12) $\forall x \neg Gx$
(13) $\neg Ga$
(14) $\forall x \neg Gx \rightarrow \neg Ga$
(15) $\neg \forall x \neg Gx$
(16) $\exists x\ Gx$
(17) $\exists x\ Fx \vee \exists x\ Gx$
(18) $Ga \rightarrow (\exists x\ Fx \vee \exists x\ Gx)$

(19) $\exists x\, Fx \vee \exists x\, Gx$

(20) $(Fa \vee Ga) \rightarrow (\exists x\, Fx \vee \exists x\, Gx)$

{21} (21) $\neg (\exists x\, Fx \vee \exists x\, Gx)$

(22) $\neg (Fa \vee Ga)$

(23) $\forall x \neg (Fx \vee Gx)$

(24) $\neg (\exists x\, Fx \vee \exists x\, Gx) \rightarrow \forall x \neg (Fx \vee Gx)$

(25) $\neg \forall x \neg (Fx \vee Gx)$

(26) $(\exists x\, Fx \vee \exists x\, Gx)$

(27) $\exists x\, (Fx \vee Gx) \rightarrow (\exists x\, Fx \vee \exists x\, Gx)$

j)

{1} (1) $\forall x\, \forall y\, ((Ex \wedge Py) \rightarrow \neg Lxy)$

{2} (2) $\forall x\, (Mx \rightarrow Px)$

(3) $\forall y\, ((Ea \wedge Py) \rightarrow \neg Lay)$

(4) $(Ea \wedge Pb) \rightarrow \neg Lab$

(5) $Mb \rightarrow Pb$

{6} (6) $Ea \wedge Mb$

(7) Pb

(8) $\neg Lab$

(9) $(Ea \wedge Mb) \rightarrow \neg Lab$

(10) $\forall y\, ((Ea \wedge My) \rightarrow \neg Lay)$

(11) $\forall x\, \forall y\, ((Ex \wedge My) \rightarrow \neg Lxy)$

l)

{1} (1) $\forall x\, (Fx \rightarrow \forall y\, (Gxy \rightarrow Hxy))$

{2} (2) $\forall x\, (Fx \rightarrow \forall y\, (Hxy \rightarrow My))$

(3) $Fa \rightarrow \forall y\, (Gay \rightarrow Hay)$

(4) $Fa \rightarrow \forall y\, (Hay \rightarrow My)$

{5} (5) Fa

(6) $\forall y\, (Gay \rightarrow Hay)$

(7) $\forall y\, (Hay \rightarrow My)$

(8) $Gab \rightarrow Hab$

(9) $Hab \rightarrow Mb$

{10} (10) Gab

(11) Mb

(12) $Gab \rightarrow Mb$

(13) $\forall y\, (Gay \rightarrow My)$

(14) $Fa \rightarrow \forall y\, (Gay \rightarrow My)$

(15) $\forall x\, (Fx \rightarrow \forall y\, (Gxy \rightarrow My))$

m)

{1} (1) $\forall x\, (Fx \rightarrow \neg Gx)$

{2} (2) $\forall x\, (Hx \rightarrow (Fx \vee Gx))$

{3} (3) $\exists x\, (Hx \wedge Gx)$

{4} (4) $Ha \wedge Ga$

(5) $Fa \rightarrow \neg Ga$

(6) $Ha \wedge \neg Fa$

{7} (7) $\forall x \neg (Hx \wedge \neg Fx)$

(8) $\neg (Ha \wedge \neg Fa)$

(9) $\forall x \neg (Hx \wedge \neg Fx) \rightarrow \neg (Ha \wedge \neg Fa)$

(10) $\neg \forall x \neg (Hx \wedge \neg Fx)$

(11) $\exists x\, (Hx \wedge \neg Fx)$

(12) $(Ha \wedge Ga) \rightarrow \exists x\, (Hx \wedge \neg Fx)$

{13} (13) $\neg \exists x (Hx \wedge \neg Fx)$
(14) $\neg (Ha \wedge Ga)$
(15) $\forall x \neg (Hx \wedge Gx)$
(16) $\neg \exists x (Hx \wedge \neg Fx) \rightarrow \forall x \neg (Hx \wedge Gx)$
(17) $\neg \forall x \neg (Hx \wedge Gx)$
(18) $\exists x (Hx \wedge \neg Fx)$

n)

{1} (1) $\forall x (Fx \rightarrow Gx)$
{2} (2) $\exists x\, Fx$
{3} (3) Fa
(4) $Fa \rightarrow Ga$
(5) Ga
{6} (6) $\forall x \neg Gx$
(7) $\neg Ga$
(8) $\forall x \neg Gx \rightarrow \neg Ga$
(9) $\neg \forall x \neg Gx$
(10) $\exists x\, Gx$
(11) $Fa \rightarrow \exists x\, Gx$
{12} (12) $\neg \exists x\, Gx$
(13) $\neg Fa$
(14) $\forall x \neg Fx$
(15) $\neg \exists x\, Gx \rightarrow \forall x \neg Fx$
(16) $\neg \forall x \neg Fx$
(17) $\exists x\, Gx$
(18) $\exists x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx$
(19) $\forall x (Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx)$

o)

{1} (1) $\exists x (P \rightarrow Fx)$
{2} (2) P
{3} (3) $P \rightarrow Fa$
(4) Fa
{5} (5) $\forall x \neg Fx$
(6) $\neg Fa$
(7) $\forall x \neg Fx \rightarrow \neg Fa$
(8) $\neg \forall x \neg Fx$
(9) $\exists x\, Fx$
(10) $(P \rightarrow Fa) \rightarrow \exists x\, Fx$
{11} (11) $\neg \exists x\, Fx$
(12) $\neg (P \rightarrow Fa)$
(13) $\forall x \neg (P \rightarrow Fx)$
(14) $\neg \exists x\, Fx \rightarrow \forall x \neg (P \rightarrow Fx)$
(15) $\neg \forall x \neg (P \rightarrow Fx)$
(16) $\exists x\, Fx$
(17) $(P \rightarrow \exists x\, Fx)$
(18) $\exists x (P \rightarrow Fx) \rightarrow (P \rightarrow \exists x\, Fx)$

p)

{1} (1) $\neg P$
(2) $P \rightarrow Fa$
{3} (3) $\forall x \neg (P \rightarrow Fx)$
(4) $\neg (P \rightarrow Fa)$

(5) $\forall x \neg (P \rightarrow Fx) \rightarrow \neg (P \rightarrow Fa)$
(6) $\neg \forall x \neg (P \rightarrow Fx)$
(7) $\exists x (P \rightarrow Fx)$
(8) $\neg P \rightarrow \exists x (P \rightarrow Fx)$
{9} (9) $\exists x\, Fx$
{10} (10) Fa
(11) $P \rightarrow Fa$
{12} (12) $\forall x \neg (P \rightarrow Fx)$
(13) $\neg (P \rightarrow Fa)$
(14) $\forall x \neg (P \rightarrow Fx) \rightarrow \neg (P \rightarrow Fa)$
(15) $\neg \forall x \neg (P \rightarrow Fx)$
(16) $\exists x (P \rightarrow Fx)$
(17) $Fa \rightarrow \exists x (P \rightarrow Fx)$
{18} (18) $\neg \exists x (P \rightarrow Fx)$
(19) $\neg Fa$
(20) $\forall x \neg Fx$
(21) $\neg \exists x (P \rightarrow Fx) \rightarrow \forall x \neg Fx$
(22) $\neg \forall x \neg Fx$
(23) $\exists x (P \rightarrow Fx)$
(24) $\exists x\, Fx \rightarrow \exists x (P \rightarrow Fx)$
(25) $(P \rightarrow \exists x\, Fx) \rightarrow \exists x (P \rightarrow Fx)$

7 10) Faça os seguintes exercícios de dedução:

a) Inferir da sentença $\forall x \forall y (x = y \rightarrow Rxy)$ a sentença $\forall x\ Rxx$.
b) Inferir das sentenças $\forall x (Fx \rightarrow x = a)$ e $\forall x (Gx \rightarrow Fx)$ a sentença $\forall x (Gx \rightarrow x = a)$.
c) Inferir das sentenças $\exists x \neg Fx$ e $\forall x (Fx \leftrightarrow x = a)$ a sentença $\exists x \exists y \neg x = y$.
d) Inferir das sentenças $\exists x (Fx \wedge Gx)$, $\forall x (Fx \rightarrow x = a)$ e $\forall x\, Fx$ a sentença $\forall x\, Gx$.

18. Tradução

1) Seja I a interpretação abaixo:

U_I = conjunto dos números inteiros estritamente positivos
$I(I^1)$ = conjunto dos ímpares
$I(Q^1)$ = conjunto dos números quadrados ({1, 4, 9, ...})
$I(R^2)$ = relação *maior que*
$I(M^2)$ = relação *múltiplo de*
$I(f^1)$ = função *sucessor*
$I(s^2)$ = função *soma*
$I(a) = 1$
$I(b) = 3$
$I(c) = 20$
$I(d) = 50$

1.1) Traduza para a linguagem formal, de acordo com I, cada uma das sentenças abaixo.

a) Todo quadrado par é múltiplo de 4.

b) Nenhum sucessor de um quadrado ímpar é quadrado.

c) Nem todo natural maior que o sucessor de 2 é quadrado.

d) Existe um natural múltiplo de 2 e de 3 que é o sucessor da soma de 2 e 3.

1.2) Traduza para o português, de acordo com I, cada uma das sentenças abaixo.

a) $\forall x\ (Mxf^1a \rightarrow \exists y\ (\neg\ Iy \wedge Mxy))$

b) $\exists x\ \forall y\ (Mxy \rightarrow (y=a \vee y=x))$

c) $\forall x\ \forall y\ (Mxy \rightarrow (x=y \vee Rxy))$

d) $\neg\ \exists x\ \exists y\ ((Qx \wedge Qy) \wedge f^1x=y)$

2) Seja I a interpretação:

$U_I = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
$I(F^1)$ = conjunto dos pares
$I(G^1)$ = conjunto dos primos
$I(R^2)$ = relação *menor que*
$I(s^1)$ = função *sucessor*
$I(g^2)$ = função *soma*
$I(a) = 0$

2.1) Traduza as sentenças abaixo para a linguagem formal, com base em I.

a) Nenhum número primo é sucessor de um primo.

b) A soma de um número ímpar com um par é ímpar.

2.2) Traduza para o português as sentenças abaixo, com base em I:

a) $\forall x\ \forall y\ ((Fx \wedge \neg\ Fy) \rightarrow \exists z\ (Gz \wedge Rg^2xyz))$

b) $\exists x\ (\forall y\ (\neg\ Fy \rightarrow Rxy) \wedge \forall w\ (Gw \rightarrow \neg\ w=x)$

3) Seja I a interpretação:

$U_I = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
$I(F^1)$ = conjunto dos pares
$I(G^1)$ = conjunto dos primos
$I(R^2)$ = relação *menor que*
$I(s^1)$ = função *sucessor*
$I(g^2)$ = função *soma*
$I(a) = 0$

3.1) Traduza para a linguagem formal com base em I:

a) Nem todos os ímpares são a soma de dois primos.

b) Toda soma de dois pares é maior que algum primo.

3.2) Traduza para o português com base em I:

a) $\forall x\ (\exists y\ \exists z\ ((Gy \wedge Gz) \wedge x=g^2yz) \rightarrow Rs^1s^1ax)$

b) $\exists x\ \exists y\ ((\neg\ x=y \wedge (Fx \wedge \neg\ Fy)) \wedge \forall z\ (Gz \rightarrow Rg^2xyz))$

4) Seja I a interpretação:

$U_I = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
$I(F^1)$ = conjunto dos pares
$I(G^1)$ = conjunto dos primos
$I(R^2)$ = relação *menor que*
$I(s^1)$ = função *sucessor*
$I(g^2)$ = função *soma*
$I(a) = 0$

4.1) Traduza as sentenças abaixo para a linguagem formal, com base em I.

a) Todo número que é o sucessor de um par é ímpar.
b) A soma de um primo com um par maior que 2 é ímpar.

4.2) Traduza para o português as sentenças abaixo, com base em I:

a) $\forall x\ (\exists y\ Ryx \rightarrow \exists z\ \exists w\ ((Fz \wedge Fw) \wedge (Rzx \wedge Rxw)))$
b) $\exists x\ \exists y\ ((Fx \wedge Rxy) \wedge \exists w\ ((Gw \wedge g^2xw{=}y) \wedge Fy))$

5) Seja I uma interpretação tal que:

U_I = conjunto dos inteiros estritamente positivos
$I(E^1)$ = conjunto dos primos
$I(R^2)$ = relação *menor que*
$I(a) = 1$
$I(O^1)$ = conjunto dos ímpares
$I(s^1)$ = função *sucessor*
$I(f^2)$ = função *soma*
$I(g^2)$ = função *produto*

Traduza as sentenças abaixo para a linguagem formal, , segundo I.

a) Nem toda soma de primos é prima.
b) Nenhum inteiro positivo maior que 1 é maior ou igual ao seu próprio quadrado.
c) Todo primo maior que 2 é ímpar.
d) A soma de dois primos é sempre maior que seu produto.

6) Seja I uma interpretação tal que:

U_I = conjunto dos inteiros estritamente positivos
$I(E^1)$ = conjunto dos pares
$I(O^1)$ = conjunto dos ímpares
$I(P^1)$ = conjunto dos primos
$I(R^2)$ = relação *menor que*
$I(a_n) = n$
$I(s^1)$ = função *sucessor*
$I(g^2)$ = função *produto*
$I(f^2)$ = função *soma*

6.1) Traduza as sentenças abaixo para a linguagem formal, de acordo com I.

a) Os pares menores que o sucessor de sete são menores que sete.
b) Os primos maiores que algum par são ímpares.
c) O produto de ímpares é ímpar.
d) Há um inteiro menor que qualquer par.
e) Há um par menor que qualquer outro par.
f) Todos os primos pares são menores que todos os primos ímpares.
g) Nenhum primo é produto de dois pares.
h) A soma de um par com um ímpar é ímpar.
i) Nem todo par é quadrado.
j) Nenhum quadrado é primo.

6.2) Traduza as sentenças abaixo para o português, com base em I.

a) $\neg \exists x\ (Ex \wedge Ox)$

b) $\forall x\ (\exists y\ (Py \wedge x = s^1y) \rightarrow (x = a_2 \vee Ox))$

c) $\forall x\ \forall y\ (f^2a_2x = y \rightarrow (Ex \leftrightarrow Ey))$

d) $\forall x\ (((\exists y\ \exists z\ f^2yz = x \wedge \neg\ y = z\ ) \wedge Px) \rightarrow Ox)$

e) $\neg\ \forall x\ (Ex \rightarrow \exists y\ \exists z\ (((Py \wedge Pz) \wedge (Oy \wedge Oz) \wedge f^2yz = x))$

7) Traduza as seguintes sentenças, de acordo com a interpretação dada (adaptação dos exercícios de B. Mates, *Lógica Elementar*, cap. 5).

7.1) U_I = conjunto dos seres humanos
$I(F^2)$ = relação "ser pai de"
$I(M^2)$ = relação "ser mãe de"
$I(H^2)$ = relação "ser marido de"
$I(S^2)$ = relação "ser irmã de"
$I(B^2)$ = relação "ser irmão de"
I(m) = Maria
I(h) = Ari
I(b) = Guilherme
I(a) = Artur

1) Todo mundo tem pai.
2) Todo mundo tem pai e mãe.
3) Quem tem pai, tem mãe.
4) Ari é pai.
5) Ari é avô.
6) Todos os avós são pais.
7) Ari tem filhos.
8) Todos os que têm netos têm filhos.
9) Ari é marido.
10) Maria é esposa.
11) Ari e Maria são marido e mulher.
12) Todos os maridos são casados.
13) Guilherme é cunhado de Maria.
14) Artur é avô paterno de Guilherme.
15) Maria é tia de Artur.
16) Toda tia solteira é irmã de alguém.
17) Nenhum tio é tia.
18) Nem todos os irmãos são germanos (filhos do mesmo pai e da mesma mãe).
19) Nenhum avô é mãe.

7.2) U_I = conjunto das montanhas e colinas
$I(M^1)$ = conjunto das montanhas
$I(E^1)$ = conjunto das que estão na Inglaterra
$I(W^1)$ = conjunto das que estão em Gales
$I(S^1)$ = conjunto das que estão na Escócia
$I(H^2)$ = relação " mais alta que"
I(s) = Snowdon
I(b) = Ben Nevis

1) Snowdon é uma montanha de Gales.

2) Ben Nevis não está na Inglaterra, nem em Gales, mas é mais alta do que Snowdon.
3) Para toda montanha na Inglaterra, há montanha mais alta na Escócia.
4) Há uma montanha na Escócia mais alta que qualquer montanha na Inglaterra ou em Gales.
5) Nenhuma montanha é mais alta que ela própria.
6) Não há montanhas, seja na Inglaterra, seja em Gales, tais que uma é maior que a outra e esta é maior que a primeira.
7) Ben Nevis é pelo menos tão alta quanto Snowdon.
8) Toda montanha que é pelo menos tão alta quanto Ben Nevis é pelo menos tão alta quanto Snowdon.
9) Pelo menos uma montanha da Escócia, além de Ben Nevis, é mais alta que todas as montanhas da Inglaterra.
10) Há pelo menos duas montanhas na Inglaterra.
11) Para cada montanha na Inglaterra, há pelo menos duas mais altas na Escócia.
12) Toda montanha que é mais alta do que todas as montanhas da Inglaterra é mais alta do que algumas montanhas de Gales.
13) Se Snowdon é pelo menos tão alta quanto Ben Nevis, então toda montanha que seja pelo menos tão alta quanto Snowdon é pelo menos tão alta quanto Ben Nevis.
14) Snowdon está na Inglaterra somente se Snowdon estiver em Gales.
15) Embora Snowdon esteja na Inglaterra somente se Snowdon estiver em Gales, não sucede que Snowdon esteja na Inglaterra se Snowdon estiver em Gales.
16) Não há montanhas na Inglaterra, na Escócia ou em Gales; Snowdon e Ben Nevis são apenas colinas.

7.3) U_I = conjunto dos seres humanos
$I(C^1)$ = conjunto dos centroavantes
$I(P^1)$ = conjunto dos médios
$I(S^1)$ = conjunto dos que marcam
$I(F^2)$ = relação "ser amigo de"
$I(0^2)$ = relação "passar para"
I(c) = Carlos
I(j) = Joaquim
I(r) = Rubens
I(s) = Sansão

1) Nem Sansão nem qualquer amigo de Sansão marca pontos. Ou Sansão marca ou Joaquim marca. Logo, Joaquim não é amigo de Sansão.
2) Somente os médios passam para Rubens. Carlos só marca se Sansão passar para Rubens, que é um centroavante. Carlos marca. Logo, Sansão é médio.
3) Todos os amigos de Sansão são amigos de Joaquim. Qualquer amigo de Rubens é amigo de Sansão. Logo, se Carlos é amigo de Rubens, então alguém é amigo de Joaquim.
4) Se Sansão é centroavante, então Carlos é médio. Se ou Rubens ou Joaquim são centroavantes, então Carlos não é médio. Sansão é centroavante, se alguém o é. Logo, se alguém é centroavante, então Joaquim não é.
5) Nenhum centroavante, que não marca, tem quaisquer amigos. Rubens e Joaquim são ambos centroavantes. Qualquer centroavante que passa para Joaquim não marca. Logo, se Rubens passa para Joaquim, então Joaquim não é é amigo de Rubens.