Um Sistema Dedutivo S para o Cálculo de Predicados com Identidade e Símbolos funcionais

1. Sistemas Dedutivos

Um sistema dedutivo S é formado por um conjunto finito de regras decidíveis que regulam a construção de determinadas seqüências finitas, chamadas "deduções", no sentido em que elas dizem quando e como um termo pode ser acrescentado a uma dedução.

As regras de um sistema dedutivo podem ser classificadas de várias maneiras; uma das principais leva em conta as etapas das construções das deduções nas quais cada regra pode ser usada. Nessa classificação, as regras podem ser divididas em incondicionadas e condicionadas. Regras incondicionadas são regras que permitem introduzir um novo termo na seqüência sem exigir que sejam satisfeitas condições que dizem respeito a eventuais termos anteriores da seqüência; elas são sempre usadas para iniciar uma dedução e, por isso, ainda que também possam ser eventualmente usadas para acrescentar termos que não o primeiro, são chamadas também "regras de iniciação". Por outro lado, as regras condicionadas dirão que determinados tipos de termos podem ser acrescentados à sequência dedutiva, se certas condições bem especificadas forem preenchidas por termos que já fazem parte da seqüência; por isso, elas também são ditas freqüentemente "regras de prosseguimento".

Dissemos, acima, que as regras do sistema dedutivo devem ser decidíveis. Isso não significa que devemos sempre saber de antemão qual é a hora de usar uma determinada regra numa seqüência; o que se quer dizer com a exigência de decidibilidade da regra é o seguinte: dada uma seqüência já construída, deve ser sempre possível verificar de modo efetivo se cada um dos termos foi introdizido por uma das regras do sistema. Em outras palavras: para cada um dos termos da seqüência, e para cada uma das regras do sistema, devemos poder responder, sim ou não, após um número finito de passos, se ele foi introduzido com base nessa regra. Assim, dada uma seqüência, será sempre possível determinar efetivamente se se trata ou não de uma dedução no sistema em causa.

2. Definição de dedução

Uma dedução D em S é uma seqüência finita $\ell_1, \ell_2, .., \ell_n$ tal que

(a) para $1 \leq i \leq n$ cada ℓ_i - dita "a linha i" - é da forma γ (i) α, onde:

(1) i é um número, dito "o número da linha i";

(2) α é uma sentença - dita "a sentença da linha i";

(3) γ é um conjunto de números menores ou iguais a i, dito o conjunto dos pressupostos da linha, ou "dívida da linha i".

(b) cada linha pode ser justificada por meio de uma das regras de S.

Assim, uma dedução terá a forma

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1 & (1) & \alpha_1 \\ \gamma_2 & (2) & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_n & (n) & \alpha_n \end{array}$$

Suponhamos que o número natural k seja um elemento do conjunto γ da linha γ (i) α de uma dedução num sistema S. Então, como vimos, $k \leq i$; assim, haverá uma linha γ' (k) β dessa mesma dedução. Diremos, então, que β é uma sentença **mencionada** na dívida da linha i. Em outras palavas: sentenças mencionadas na dívida de uma linha i são sentenças cujos números de linha ocorrem na dívida da linha i.

Definição de conseqüência dedutiva

Dizemos que α é uma conseqüência dedutiva de Γ em S ($\Gamma \vdash \alpha$) se existe uma dedução contendo uma linha $[\gamma,(n),\alpha]$ e as sentenças mencionadas em γ são todas elementos de Γ.

Definição de teorema

Dizemos que α é um teorema de S ($\vdash \alpha$) se existe uma dedução contendo uma linha do tipo $[\varnothing,(n),\alpha]$.

Regras de S:

O sistema S com o qual iremos trabalhar terá oito regras, duas de iniciação (P, Ax) e seis regras de prosseguimento (T, IU, GU, E, I, C). São as seguintes as regras de S. Numa dedução com n-1 linhas ($n \geq 1$)

(P) <u>Introdução de premissa</u>:
Para qualquer sentença α, a linha

$\{n\}$ (n) α

pode ser introduzida na dedução.
Ou seja, qualquer sentença pode ser introduzida como sentença de uma nova linha, desde que o conjunto contendo o número dessa linha seja tomado como dívida da linha.

(Ax) <u>Introdução de axioma</u>:
Se α é um axioma de S, a linha

$\varnothing$ (n) α

pode ser introduzida na dedução.
São axiomas S: (i) as sentenças tautológicas e (ii) a sentença a=a.
Ou seja, em um momento qualquer da dedução, podemos acrescentar, com dívida vazia, a sentença a=a ou qualquer sentença tautológica.

(T) <u>Conseqüência tautológica</u>:
Se, dentre as linhas da dedução, ocorrem as k linhas:
γ_{m1} (m_1) β_{m1}, ..., γ_{mk} (m_k) β_{mk} e se α é conseqüência tautológica de $\{\beta_l,\ldots,\beta_m\}$, então posso introduzir a nova linha

γ (n) α,

onde $\gamma = \gamma_{m1} \cup \ldots \cup \gamma_{mk}$.
Ou seja, posso introduzir, numa linha n, uma conseqüência tautológica de sentenças de linhas anteriores, desde que tome como "dívida", a união das dívidas dessas linhas anteriores. Exemplo:

$\varnothing$	(1)	$a = a$	Ax
$\{2\}$	(2)	$(\forall x Fx \rightarrow Rab)$	P
$\{3\}$	(3)	$(Rab \rightarrow \neg a = a)$	P
$\{2, 3\}$	(4)	$(\forall x Fx \rightarrow \neg a = a)$	2, 3 / T
$\{2, 3\}$	(5)	$\neg \forall x Fx$	1, 4 / T

Vale lembrar que podemos verificar se uma sentença é conseqüência tautológica de um conjunto finito de sentenças utilizando uma tabela de verdade. Isso nos garante que essa é uma boa regra, pois as tabelas nos asseguram o seu caráter decidível.

(IU) <u>Instanciação universal</u>:
Se a linha γ (m) $\forall\xi\alpha$ ocorre na dedução, posso introduzir a linha

γ (n) $\alpha^{\xi}/_{\tau}$

onde m<n, τ é um termo fechado qualquer e $\alpha^{\xi}/_{\tau}$ é o resultado da substituição de todas as ocorrências livres da variável ξ em α por ocorrências de τ.

Por exemplo:

γ	(n)	$\forall xRxx$	P
γ	(n+m)	Raa	n / IU
γ	(n+k)	Rf^1af^1a	n / IU

Outro exemplo:

γ	(n)	$\forall x\ (Fx \rightarrow Rxa)$	P
γ	(n+m)	$(Fa \rightarrow Raa)$	n / IU
γ	(n+k)	$(Fa \rightarrow Rba)$	n / IU

Alguns erros comuns:

γ	(n)	$\forall xRxx$	P	
γ	(n+k)	Rxa	n / IU	***Erro!*** *todas variáveis devem ser substituídas!*
γ	(n+k')	Rab	n / IU	***Erro!*** *a substituição deve ser pelo mesmo termo!*
γ	(n+k'')	Ryy	n / IU	***Erro!*** *a substituição deve ser por um termo fechado!*
γ	(n)	$\neg\forall xFx$	P	
γ	(n+k)	$\neg Fa$	n / IU	***Erro!*** *a sentença da linha 1 não é da forma* $\forall\xi\alpha$*!*
γ	(n)	$\forall x\ Fx \rightarrow Ga$	P	
γ	(n+k)	$Fa \rightarrow Ga$	n / IU	***Erro!*** *a sentença da linha 1 não é da forma* $\forall\xi\alpha$*!*

(E) <u>Quantificação existencial</u>:
Se ocorre na dedução uma linha da forma γ (m) $\neg\forall\neg\xi\alpha$, podemos introduzir a nova linha γ (n) $\exists\xi\alpha$; e se ocorre uma linha da forma γ (m) $\exists\xi\alpha$, podemos introduzir a nova linha γ (n) $\neg\forall\neg\xi\alpha$.

Por exemplo:

γ	(m)	$\exists x\,(Fx \wedge Gx)$	
γ	(n)	$\neg\forall x \neg\,(Fx \wedge Gx)$	n / E

Ou também:

γ'	(m)	$\neg\forall x \neg Fx$	
γ'	(n)	$\exists x Fx$	n' / E

Alguns erros comuns:

γ	(m)	$(\forall x Fx \rightarrow \exists x Gx)$	P	
γ	(n)	$(\forall x Fx \rightarrow \neg\forall x \neg Fx)$	1/ E	***erro!*** *A regra não pode ser aplicada a uma parte da sentença!*

γ	(m)	$\neg\forall x Fx$	P	
γ	(n)	$\exists x \neg Fx$	1/E	***erro!*** *a regra só se aplica sentenças iniciadas com $\exists$ e $\neg\forall\neg$!*

(I) <u>Identidade</u>:

Se ocorrem na dedução duas linhas, uma delas da forma γ_1 (l) α e a outra da forma γ_2 (m) $\tau_1=\tau_2$, então podemos introduzir a linha γ (n) $\alpha^{\tau 1}/_{\tau 2}$, onde $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$ e $\alpha^{\tau 1}/_{\tau 2}$ resulta de α por substituição de uma ou mais ocorrências do termo fechado τ_1 por ocorrências do termo fechado τ_2. A linha m é chamada "linha de autorização" e a linha l, "linha objeto" da regra I.

Exemplo:

γ	(n)	$((Fa \wedge Ga) \rightarrow Rab)$	
	...		
γ'	(l)	$a = f^1b$	
	...		
$\gamma \cup \gamma'$	(m)	$((Fa \wedge Gf^1b) \rightarrow Rab)$	l, n / I
$\gamma \cup \gamma'$	(m')	$((Ff^1b \wedge Ga) \rightarrow Rab)$	l, n / I
$\gamma \cup \gamma'$	(m'')	$(Ff^1b \wedge Ff^1b) \rightarrow Rf^1bb)$	l, n / I

Observe-se que não é necessário substituir todas as ocorrências do termo em questão. Por outro lado, note-se que a regra só me permite substituir o primeiro termo da igualdade usada pelo segundo, não o contrário. Por exemplo,

γ_1	(l)	$(Fa \rightarrow Rab)$	P	
γ_2	(m)	$c = a$	P	
$\gamma_1 \cup \gamma_2$	(n)	$(Fc \rightarrow Rcb)$	1,2/I	***erro!*** *c pode ser substituído por a, mas o contrário não pode ser feito diretamente.*

(GU) <u>Generalização universal</u>:
Se temos uma linha da forma γ (m) $\alpha^{\xi}/_{k}$, onde $\alpha^{\xi}/_{k}$ é o resultado da substituição de todas as ocorrências livres da variável ξ em α por ocorrências da constante individual k, e k não ocorre nem em α nem em nenhuma sentença mencionada em γ, então posso introduzir a linha γ (n) $\forall\xi\alpha$.

Para compreender melhor a justificação dessa regra, vejamos em que casos uma generalização com base num caso particular é admissível. A transformação de uma afirmação sobre um determinado objeto em uma afirmação sobre todos os objetos é legítima, quando a sentença sobre um determinado objeto foi obtida independentemente de quaisquer propriedades específicas desse objeto. Quando não dependemos de propriedades específicas de um objeto, dizemos que se trata de um objeto qualquer - poderia ser qualquer um, individuamos só para efeitos de melhor visualização do que está em causa na argumentação. Portanto, nesse caso, podemos generalizar a conclusão.

Exemplo da utilização da GU:

{1}	(1)	$\forall$xFx	P
{2}	(2)	$\forall$x(Fx$\rightarrow$Rxx)	P
{1}	(3)	Fa	1/IU
{2}	(4)	(Fa$\rightarrow$Raa)	2/IU
{1,2}	(5)	Raa	2,4/T

Como 'a' não ocorre nem em Gxx nem mas sentenças das linhas (1) e (2), podemos utilizar a regra GU:

{1,2}	(6)	$\forall$xRxx	5/GU

Alguns erros comuns:
(seja a linha (6) a continuação da linha (5) na dedução acima):

{1, 2}	(6)	$\forall$xRax	5 / GU	***erro!*** *a substituição deve ser total*

Exemplo de outro tipo de erro:

{1}	(1)	Fa	P
{2}	(2)	$\forall$x(Fx$\rightarrow$Rxx)	P
{2}	(3)	(Fa$\rightarrow$Raa)	2/IU
{1, 2}	(4)	Raa	1,3/T
{1,2}	(5)	$\forall$xRxx	4/GU ***erro!*** *pois 'a' aparece na dívida de (4)*

(C) <u>Condicionalização</u>:

Se temos duas linhas na dedução, uma linha da forma γ (l) α, outra linha da forma {m} (m) β e se, além disso, $m \in \gamma$, então podemos acrescentar a nova linha γ-{m} (n) ($\beta \rightarrow \alpha$).

A regra da Condicionalização é, assim, a regra que nos permite eliminar dívidas. Note-se que, no sistema S, um número de linha, m, ocorre numa dívida se e só se a linha m foi justificada pela regra P - e, portanto, tiver a forma {m} (m) β. A regra P é efetivamente a única forma possível de assumirmos dívidas nesse sistema; portanto, todo número que aparece na dívida de uma linha será o número de uma linha introduzida pela regra P.

A regra P nos permite, para efeito de argumentação, supor verdadeira uma determinada sentença - ou seja, assumir hipóteses – como fazemos, nas linhas (1) e (2), abaixo. A partir daí, prosseguimos usando as demais regras relevantes para a obtenção de uma determinada linha final:

{1}	(1)	$\forall xFx$	P
{2}	(2)	$\forall x(Fx \rightarrow Gxx)$	P
{1}	(3)	Fa	1/IU
{2}	(4)	$Fa \rightarrow Gaa$	2/IU
{1,2}	(5)	Gaa	2,4/T
{1,2}	(6)	$\forall xGxx$	5/GU

Nesse momento, cabe-nos indicar o fato de que fizemos pressuposições iniciais. Isso pode ser feito de duas maneiras. Podemos simplesmente dizer que $\forall xGxx$ é conseqüência dedutiva de $\forall xFx$ e $\forall x(Fx \rightarrow Gxx)$;para tanto, escrevemos:

$$\{\forall xFx, \forall x(Fx \rightarrow Gxx)\} \vdash \forall xGxx.$$

Ou podemos também acrescentar novas linhas na dedução para explicitar os pressupostos de que partimos, usando a regra da condicionalização:

{1}	(7)	$(\forall x(Fx \rightarrow Gxx) \rightarrow \forall xGxx)$	2,6/C

Obtemos, assim:

$$\{\forall xFx\} \vdash (\forall x(Fx \rightarrow Gxx) \rightarrow \forall xGxx).$$

Aplicando a regra C mais uma vez, obtemos:

$\varnothing$	(8)	$(\forall xFx \rightarrow (\forall x(Fx \rightarrow Gxx) \rightarrow \forall xGxx))$	1,7/C

Chegamos assim ao teorema:

$$\vdash (\forall xFx \rightarrow (\forall x(Fx \rightarrow Gxx) \rightarrow \forall xGxx))$$

Correção do Sistema

Temos a demonstrar que, para toda linha de dedução, a sentença da linha é conseqüência do conjunto de sentenças mencionadas na dívida da linha. Isso pode ser feito mostrando-se que essa propriedade vale para as regras de iniciação e é preservada pelas regras de prosseguimento. Usaremos $\vDash$ para representar a relação de conseqüência (semântica) e $\mathbb{T}$ para a relação de conseqüência tautológica. As seguintes proposições básicas são relevantes para a prova de correção do sistema:

1) Se $\Gamma \sqsubseteq \Delta$ e $\Gamma \vDash \alpha$ então $\Delta \vDash \alpha$;
2) Se $\Gamma \vDash \alpha$ e, para todo $\beta \in \Gamma$, $\Delta \vDash \beta$, então $\Delta \vDash \alpha$
3) Se $\Gamma \mathbb{T} \alpha$ então $\Gamma \vDash \alpha$.
4) Se $v_{\mathfrak{I}}(\forall \S \alpha) = V$ então para todo termo fechado τ, $v_{\mathfrak{I}}(\alpha^{\S}/_{\tau}) = V$.
5) Se k não ocorre em α então, para quaisquer duas interpretações k-variantes $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}'$, $v_{\mathfrak{I}}(\alpha) = v_{\mathfrak{I}'}(\alpha)$.

Convencionemos indicar por $[\gamma]$ o conjunto das sentenças mencionadas na dívida γ de uma linha dedutiva. Cabe-nos estabelecer, com auxílio das proposições acima formuladas, que cada uma das regras do sistema é correta, o que se exprime, em casa caso, como se segue:

(P) $\{\alpha\} \vDash \alpha$

(Ax) As tautologias são válidas; a sentença 'a=a' é válida.

(T) Se, para $1 \leq i \leq k$, $[\gamma_{mi}] \vDash \beta_i$ e se α é uma conseqüência tautológica do conjunto $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$, então $[\gamma_{m1} \cup \ldots \cup \gamma_{mk}] \vDash \alpha$.

(IU) Se $[\gamma] \vDash \forall \S \alpha$ então $[\gamma] \vDash \alpha^{\xi}/_{\tau}$, para todo termo fechado τ.

(GU) Se $[\gamma] \vDash \alpha^{\S}/_{k}$ e se k não ocorre em α nem em nenhum elemento de γ, então $[\gamma] \vDash \forall \S \alpha$

(E) $[\gamma] \vDash \exists \S \alpha$ se e só se $[\gamma] \vDash \neg \forall \S \neg \alpha$

(I) Se $[\gamma] \vDash \alpha$ e $[\gamma'] \vDash \tau_1 = \tau_2$ então $[\gamma \cup \gamma'] \vDash \alpha^{\tau 1}/_{\tau 2}$

(C) Se $[\gamma] \cup \{\alpha\} \vDash \beta$ então $[\gamma] \vDash (\alpha \rightarrow \beta)$

Correção do Sistema - Temos a demonstrar que para toda linha de dedução, a sentença da linha é conseqüência da dívida da linha. Isso pode ser feito mostrando que as a propriedade vale para as regras de onocoação e é preservada pelas regras de prosseguimento. Usando $\models$ para representar a relação de conseqüência (semântica), temos que provar as seguintes 8 proposições:

(P) $\{\alpha\} \models \alpha$

(Ax) As tautologias são válidas; a sentença 'a=a' é válida.

(T) Se α é conseqüência tautológica de $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$, então $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\} \models \alpha$.

(IU) Se $\Gamma \models \forall \S \alpha$ então $\Gamma \models \alpha^{\xi}/_{\tau}$, para todo termo fechado τ.

(GU) Se $\Gamma \models \alpha^{\xi}/_{k}$ e se k não ocorre em α nem em nenhum elemento de Γ, então $\Gamma \models \forall \S \alpha$

(E) $\Gamma \models \exists \S \alpha$ se e só se $\Gamma \models \neg \forall \S \neg \alpha$

(I) Se $\Gamma \models \alpha$ e $\Delta \models \tau_1 = \tau_2$ então $\Gamma \cup \Delta \models \alpha^{\tau 1}/_{\tau 2}$

(C) Se $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ então $\Gamma \models (\alpha \rightarrow \beta)$