LOGIQUE MATHÉMATIQUE. – *Une étude sémantique de quelques calculs propositionnels.* Note (*) de **Andréa Loparić**, présentée par M. René Garnier.

On présente une sémantique et une méthode de décision pour le calcul $\mathscr{C}_\omega$ de N. C. A. da Costa. Les procédés employés peuvent être adaptés pour obtenir des sémantiques et parfois des méthodes de décision pour certains autres calculs.

In this Note we present a semantical analysis of the calculus $\mathscr{C}_n$ (cf. *N. C. A. da Costa*, Comptes rendus, 257, 1963, p. 3790) *as a by-product we obtain a decision procedure for this calculus. Our methods can be adapted in order to apply to other calculi, such as the minimal and full intuitionistic.*

1. Dans une Note récente ([1]) MM. N. C. A. da Costa et E. H. Alves ont présenté une sémantique pour les calculs $\mathscr{C}_n$, $1 \leqq n < \omega$, et ont posé la question de savoir si $\mathscr{C}_\omega$ avait une sémantique semblable. Nous donnons ici une réponse à cette question et indiquons, à la fin de la Note, des possibles extensions des résultats obtenus à d'autres calculs.

Pour la facilité du lecteur, rappelons que $\mathscr{C}_\omega$ a un vocabulaire primitif formé par un ensemble dénombrable (infini) de variables propositionnelles, par les connectifs $\neg$, &, $\vee$, $\supset$, et par les parenthèses. Les notions de formule, de sous-formule, d'axiome, de règle, de postulat, etc., aussi bien que l'usage de $\vdash$, sont définies comme d'habitude. Les postulats de $\mathscr{C}_\omega$ sont les suivants (où A, B, C sont des formules quelconques) :

$\mathscr{P}_1$: $A \supset (B \supset A)$;

$\mathscr{P}_2$: $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$;

$\mathscr{P}_3$: $A,\ A \supset B/B$;

$\mathscr{P}_4$: $A \,\&\, B \supset A$;

$\mathscr{P}_5$: $A \,\&\, B \supset B$;

$\mathscr{P}_6$: $A \supset (B \supset A \,\&\, B)$;

$\mathscr{P}_7$: $A \supset A \vee B$;

$\mathscr{P}_8$: $B \supset A \vee B$;

$\mathscr{P}_9$: $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$;

$\mathscr{P}_{10}$: $A \vee \neg A$;

$\mathscr{P}_{11}$: $\neg\neg A \supset A$.

Nous signalons aussi que $\mathscr{C}_\omega$ est strictement plus faible que les $\mathscr{C}_n$, $1 \leqq n < \omega$; la loi de Peirce, par exemple, n'y est pas une thèse ([2]). En plus, $\mathscr{C}_\omega$ est décidable ([3]), mais ne l'est pas par des matrices finies ([4]).

Dans cette Note, nous emploierons des majuscules latines comme variables syntaxiques pour des formules, des majuscules grecques, pour des ensembles de formules; $\mathfrak{F}$ représente l'ensemble de toutes les formules; $A_n^{\supset}$ est une abréviation pour

$$A_1 \supset (A_2 \supset \ldots \supset (A_{n-1} \supset A_n) \ldots),$$

où A_i, $1 \leqq i \leqq n$, est une formule quelconque; quand il convient d'indiquer que A_n n'est pas de la forme $B \supset C$, nous écrirons aussi $A_{(n)}^{\supset}$. Nous ferons l'usage de $\Rightarrow$ et de $\Leftrightarrow$ comme notations métalinguistiques pour l'implication et l'équivalence.

2. Semi-validations et validations pour $\mathscr{C}_\omega$.

Définition 1. – Une *semi-validation* s est une fonction de $\mathfrak{F}$ dans $\{0, 1\}$ telle que :

(1 *a*) $$s(\neg A) = 0 \Rightarrow s(A) = 1;$$

(1 *b*) $$s(\neg\neg A) = 1 \Rightarrow s(A) = 1;$$

(2) $$s(A \& B) = 1 \Leftrightarrow s(A) = s(B) = 1;$$

(3) $$s(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow s(A) = 1 \quad \text{ou} \quad s(B) = 1;$$

(4 *a*) $$s(A \supset B) = 0 \Rightarrow s(B) = 0;$$

(4 *b*) $$s(A \supset B) = 1 \Rightarrow s(A) = 0 \quad \text{ou} \quad s(B) = 1.$$

DÉFINITION 2. — Une *validation* v est une semi-validation qui satisfait à la condition : (5) si $v(A^{\supset}_{(n)}) = 0$, alors, il y a une semi-validation s telle que, pour tout i, $1 \leqq i < n$, $s(A_i) = 1$ et $s(A_n) = 0$.

Soit v une validation; v est un modèle de Γ si, pour toute A, $v(A) = 1$. On écrit $\Gamma \models A$ si, pour toute v qui est un modèle de Γ, $v(A) = 1$; $\models A$ si, pour toute v, $v(A) = 1$. Une validation est *singulière* si, pour au moins une formule A, $v(A) = v(\neg A) = 1$; v est *différenciée* s'il y a au moins une A et une B, telles que $v(A) = v(A \supset B) = 0$; si v n'est pas singulière, ni différenciée, v est dite *normale*.

3. CORRECTION.

LEMMA 1. — *Si* $\not\models A^{\supset}_n$, *il existe une semi-validation s, telle que, pour tout i*, $1 \leqq i < n$, $s(A_i) = 1$ *et* $s(A_n) = 0$.

Démonstration. — Toute formule de la forme $A^{\supset}_n$ est de la forme $B^{\supset}_{(m)}$ pour un certain $m \geqq n$. Soit $p = m - n$. Si $v(B^{\supset}_{(m)}) = 0$, d'après la définition 2 il existe une s, $s(B^m) = 0$ et, pour tout i, $1 \leqq i < m$, $s(B_i) = 1$. Dans ce cas, $s(B_1) = \ldots = s(B_{m-p-1}) = 1$, et, par la condition (4 *a*) de la définition 1, $s(B^{\supset}_{m-p}) = 0$. Puisque $A_n = B^{\supset}_{m-p}$ et, pour tout i, $1 \leqq i < n$, $A_i = B_i$, la proposition est démontrée.

DÉFINITION 3. — n est le degré d'un postulat $\mathscr{P}$, de $\mathscr{C}_\omega$, si $\mathscr{P}$ est un schéma d'axiomes de la forme $A^{\supset}_n$.

LEMMA 2. — *Si n est le degré d'un postulat* $\mathscr{P}$, *de* $\mathscr{C}_\omega$, *et* $A^{\supset}_n$ *est un axiome du schéma* $\mathscr{P}$, *alors il n'y a pas de semi-validation s, telle que, pour tout i*, $1 \leqq i < n$, $s(A_i) = 1$ *et* $s(A_n) = 0$.

COROLLAIRE. — *Si* F *est un axiome, alors* $\models$ F.

THÉORÈME 1. — $\Gamma \vdash F \Rightarrow \Gamma \models F$.

Démonstration. — Par induction dans la longueur d'une déduction de F à partir de Γ.

COROLLAIRE. — $\vdash F \Rightarrow \models F$.

4. COMPLÉTUDE.

DÉFINITION 4. — Δ est F-saturé si, pour tout G, $G \in \Delta$ si et seulement si $\Delta \cup \{G\} \nvdash F$.

LEMMA 3. — *Si* $\Gamma \nvdash F$, *alors il existe un* Δ F-*saturé tel que* $\Gamma \subset \Delta$.

Démonstration. — Analogue à celle du théorème classique correspondant.

COROLLAIRE. — *Si* Δ *est* F-*saturé, on a :*

(1 *a*) $\neg A \notin \Delta \Rightarrow A \in \Delta$;

(1 *b*) $\neg\neg A \in \Delta \Rightarrow A \in \Delta$;

(2) $A \& B \in \Delta \Leftrightarrow A, B \in \Delta$;

(3) $A \vee B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$ *ou* $B \in \Delta$;

(4 *a*) $A \supset B \notin \Delta \Rightarrow B \notin \Delta$;

(4 *b*) $A \supset B \in \Delta \Rightarrow A \notin \Delta$ *ou* $B \in \Delta$;

(5) *Si* $A_n^{\supset} \notin \Delta$, *alors, pour chaque* i, $1 \leqq i < n$, *il existe* Δ', Δ' *est* A_{i-1}*-saturé et* $\Delta \cup \{ A_1, \ldots, A_i \} \subset \Delta'$.

LEMMA 4. — *Si* Δ *est* F*-saturé, la fonction caractéristique de* Δ *est une semi-validation.*

Démonstration. — Conséquence de (1 *a*)-(3) du corollaire du lemma 3.

LEMMA 6. — *Si* Δ *est* F*-saturé, la fonction caractéristique de* Δ *est une validation.*

Démonstration. — Conséquence du lemma 4 et de (5) du corollaire du lemma 3.

THÉORÈME 2. — $\Gamma \models F \Rightarrow \Gamma \vdash F$.

COROLLAIRE. — $\models F \Rightarrow \vdash F$.

5. EXISTENCE DES VALIDATIONS.

THÉORÈME 3. — *Il y a des validations normales, des validations singulières et des validations différenciées.*

Démonstration. — (*a*) Soit Δ un ensemble consistant maximal dans le calcul propositionnel classique. Il est facile de voir que : (i) pour toute $F \notin \Delta$, Δ est F-saturé (dans $\mathscr{C}_\omega$); (ii) pour toute A, $A \in \Delta$ si et seulement si $\neg A \notin \Delta$; (iii) pour toute A, toute B, si $A \notin \Delta$, alors $A \supset B \in \Delta$; d'où il suit que la fonction caractéristique de Δ est une validation normale.

(*b*) Soit A une variable propositionnelle. Par des matrices, on démontre que $A \,\&\, \neg A \nvdash \neg (A \,\&\, \neg A)$. Prennons Δ tel que Δ est $\neg (A \,\&\, \neg A)$-saturé et $\{ A \,\&\, \neg A \} \subset \Delta$. Alors, la fonction caractéristique de Δ est une validation singulière.

(*c*) Prenons deux variables propositionnelles distinctes A et B. On démontre par des matrices que $\nvdash A \vee (A \supset B)$ dans $\mathscr{C}_\omega$. Soit Δ $A \vee (A \supset B)$-saturé. Alors, la fonction caractéristique de Δ est une validation différenciée.

6. DÉCIDABILITÉ. — M. Fidel a démontré, par des méthodes algébriques, que les calculs $\mathscr{C}_n$, $1 \leqq n \leqq \omega$, sont décidables. La sémantique présentée par N. C. A. da Costa et E. Alves a été le fondement d'une méthode de décision pour les calculs $\mathscr{C}_n$, $1 \leqq n \leqq \omega$; pareillement, nous avons obtenu un procédé pour décider le calcul $\mathscr{C}_\omega$, basé sur les concepts sémantiques exposés dans cette Note. En effet, soient Σ (A) l'ensemble des sous-formules de A et $\mathscr{H}^A$ l'ensemble des fonctions de Σ (A) dans $\{ 0, 1 \}$, satisfaisant les conditions : (i) si $f \in \mathscr{H}^A$, il y a une validation v, telle que, pour toute $B \in \Sigma(A)$, $v(B) = f(B)$; (ii) si v est une validation, il existe une fonction $f \in \mathscr{H}^A$, telle que, pour toute $B \in \Sigma(A)$, $v(B) = f(B)$. Alors, $\mathscr{H}^A$ peut être effectivement construit et représenté par un « tableau de vérité » pour Σ (A). On a le théorème :

THÉORÈME 4. — $\mathscr{C}_\omega$ *est décidable par la méthode des* « *tableaux de vérité* ».

Par les « tableaux de vérité » on peut démontrer encore :

THÉORÈME 5 (A. M. Sette). — *Aucun théorème de* $\mathscr{C}_\omega$ *n'est de la forme* $\neg$ A.

THÉORÈME 6. — *On ne peut pas définir une opération qui ait, dans* $\mathscr{C}_\omega$, *toutes les propriétés de la négation classique.*

7. EXTENSION DES RÉSULTATS OBTENUS A D'AUTRES CALCULS. — Tous les résultats précédents s'appliquent directement aux calculs intuitionnistes positif et implicatif, si l'on supprime les conditions (1 *a*)-(1 *b*) et (1 *a*)-(3), respectivement, de la définition de semi-validation. En modifiant convenablement les conditions (1 *a*)-(1 *b*), de cette même définition, il est possible d'adapter la majorité de nos résultats aux calculs intuitionnistes minimal et intuitionniste. Il est aussi possible d'éteindre nos méthodes de sorte à obtenir des sémantiques pour les calculs de prédicats correspondants.

(*) Séance du 8 novembre 1976.

(1) N. C. A. DA COSTA et E. H. ALVES, *Comptes rendus*, 283, série A, 1976, p. 729.

(2) N. C. A. DA COSTA et M. GUILLAUME, *Portugalia Mathematica*, 24, 1965, p. 201.

(3) M. FIDEL, *The Decidability of the Calculi $\mathscr{C}_n$* (à paraître).

(4) A. I. ARRUDA, *Comptes rendus*, 280, série A, 1975, p. 1253.

Universidade Estadual de Campinas,
Centro de Lògica e Epistemologia,
Campinas, S.P.,
Brésil.