RELATÓRIO DE PESQUISA

GILMAR DE MORAES

DUAS APLICAÇÕES DA TEORIA DAS VALORAÇÕES

Primeiro relatório de atividades de pesquisa apresentado a FAPESP sob orientação da Profa. Dra. Andréa Maria Altino de Campos Loparic.

São Paulo, janeiro de 1995

I. Resumo do plano inicial

No Projeto de Pesquisa foram estabelecidos os seguintes objetivos:

(i) completar a minha formação básica em Lógica ;

(ii) desenvolver semânticas de valorações, bem como métodos de decisão nelas baseados, para o cálculo intuicionista e para o sistema modal S4.

Para o primeiro semestre havíamos programado:

1. Participação nas atividades do Seminário de Lógica dirigido pela Profa. Dra. A. Loparic,
   (i) frequentando os seminários sobre o Mendelson [9];
   (ii) lendo os dois últimos capítulos da Parte II do Smullyan [10].
2. Leitura dos artigos [4], [5] e [6].
3. Redação da demonstração da correção e completude do cálculo intuicionista com respeito à hipótese sobre a definição de verdade apresentada pela Profa. Dra. A. Loparic.

A hipótese mencionada acima foi tomada do cálculo Cw, em [4], com as seguintes modificações:

(i) Na definição de semi-valoração, foram guardadas as cláusulas da conjunção, da disjunção e da implicação e foi proposta para a negação a seguinte cláusula única: se $s(\neg A) = 1$ então $s(A) = 0$;

(i) Na definição de valoração, foi proposto o seguinte addendum: "e se An tem a forma $\neg B$ então $s(B) = 1$".

II. Dificuldades surgidas

A hipótese sobre a definição de verdade para a Lógica Intuicionista, inicialmente apresentada pela Profa. Dra. A. Loparic no Projeto de Pesquisa, não permitia provar a correção, mais especificamente, não permitia provar que A10 era uma sentença válida. Por este motivo, Loparic fez as seguintes modificações: manteve a definição de semi-valoração; apresentou um novo conceito, o de semi-valoração normal para uma dada fórmula; definiu valoração a partir deste conceito.

III. Resultados parciais obtidos

Seguindo o cronograma de trabalho, especificado no nosso Projeto de Pesquisa, este primeiro relatório detalha as atividades concernentes a minha formação em lógica, na Seção A, e a primeira parte de nossa investigação acerca da semântica de valorações para a Lógica Intuicionista (Cálculo de Heyting, no que se segue, designado por "LI"), a saber, a prova da completude e da correção deste sistema, a partir das hipóteses sobre a definição de verdade, sugeridas pela Profa. Dra. A. Loparic e apresentadas em 2.1., 2.2. e 2.3., da Seção B.

Seção A

As atividades desenvolvidas foram as seguintes:

(i) estudo, com resolução dos exercícios, das seções 2 a 7, do Segundo Capítulo de Mendelson [9], que corresponde aos seguintes temas: semântica de primeira ordem, axiomas e regras de uma teoria de primeira ordem, regras derivadas, metateoremas de equivalência, "replacement" e completude;

(ii) estudo dirigido pelo Prof. Dr. J. A. Guerzoni dos cinco primeiros capítulos de Chellas [1], alguns dos temas tratados foram: maximalidade, lema de Lindenbaum, correção, completude, modelos canônicos, filtrações, decidibilidade e modalidades em alguns sistemas modais.

Seção B

A redação desta seção foi feita a partir das hipóteses já mencionadas da Profa. Dra. A. Loparic e da leitura do artigo [4]. Neste artigo, nota-se como características principais: a distinção entre semi-valoração e valoração; a correspondência da noção de valoração e da noção de função característica de conjuntos F-saturados, noção esta que permite a generalização e a viabilização da demonstração da completude para sistemas que não possuem negação forte, tais como LI.

1. O Cálculo L I

A linguagem de LI constitui-se por: um conjunto infinito de variáveis proposicionais, p, q, r, p', q', r', p', ...; um conectivo unário, $\neg$ (negação), e três conectivos binários, $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção) e $\supset$ (implicação); parênteses. As noções de fórmula atômica, fórmula, axioma, regra de inferência, dedução (de uma fórmula a partir de um conjunto dado), prova, regras de restauração de parênteses (excluindo a cláusula de colocação de parênteses sobre negações de variáveis proposicionais), função característica de um conjunto dado, etc., estão definidas como em Kleene [2]. Além disso, convém lembrar que, em LI, vale o Teorema da Dedução, na seguinte forma: $\Gamma, A \vdash B \Leftrightarrow \Gamma \vdash A \supset B$.

Axiomas de LI:

A1: $A \supset (B \supset A)$

A2: $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

A3: $A, A \supset B \,/\, B$

A4: $(A \wedge B) \supset A$

A5: $(A \wedge B) \supset B$

A6: $A \supset (B \supset (A \wedge B))$

A7: $A \supset (A \vee B)$

A8: $B \supset (A \vee B)$

A9: $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$

A10: $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

A11: $\neg A \supset (A \supset B)$

Na redação desta seção, usaremos as seguintes convenções metalinguísticas:

(i) letras latinas maiúsculas como variáveis para fórmulas;

(ii) letras gregas maiúsculas para conjuntos de fórmulas;

(iii) o conjunto de todas as fórmulas será denotado por $\mathcal{F}$;

(iv) $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são símbolos metalinguísticos para implicação e equivalência;

(v) $A_n^{\supset}$ e $A_{(n)}^{\supset}$ são abreviações para $A_1 \supset (A_2 \supset \ldots \supset (A_{n-1} \supset A_n) \ldots)$, sendo que $A_{(n)}^{\supset}$ indicará que A_n não tem a forma $A' \supset A''$;

(vii) Σ_F denota o conjunto de todas as subfórmulas de F;

(viii) Σ_Γ denota o conjunto $\{F': F' \in \Sigma_F, \text{ para algum } F \in \Gamma\}$.

2. Semi-valorações e valorações para L I

2.1. Uma *semi-valoração* s é uma função de $\mathcal{F}$ em $\{0,1\}$, tal que:

(a) $s(\neg A) = 1 \Rightarrow s(A) = 0$;

(b) $s(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow s(A) = s(B) = 1$;

(c) $s(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow s(A) = 1$ ou $s(B) = 1$;

(d) $s(A \supset B) = 0 \Rightarrow s(B) = 0$;

(e) $s(A \supset B) = 1 \Rightarrow s(A) = 0$ ou $s(B) = 1$.

2.2. Uma semi-valoração é dita *normal para A* sse se A for da forma $\neg B$ então $s(A) \neq s(B)$.

2.3. Uma *valoração* v é uma semi-valoração tal que para todo $n \geq 0$, se $v(A_{(n)}^{\supset}) = 0$, então há uma semi-valoração s, normal para A_n, tal que para $1 \leq i < n$, $s(A_i) = 1$ e $s(A_n) = 0$.

2.4. Dizemos que uma valoração é *paracompleta* se, e somente se para algum A, $v(A) = v(\neg A) = 0$; v é *diferenciada* se existem A,B tais que $v(A) = v(A \supset B) = 0$; se v não é nem paracompleta nem diferenciada, então v é *clássica*.

2.5. Uma valoração v é um *modelo* de um conjunto Γ (em símbolos, $v \Vdash \Gamma$) se, e somente se para toda $A \in \Gamma$, $v(A) = 1$; A é *válida* ($\models A$) se, e somente se para toda v, $v(A) = 1$; A é uma *conseqüência semântica* de Γ ($\Gamma \models A$) se, somente se para toda v, se $v \Vdash \Gamma$, então $v(A)=1$.

3. Conjuntos F-saturados em L I

3.1. Δ é um *conjunto F-saturado* se, e somente se $\Delta \nvdash F$ e, para toda A, se $A \notin \Delta$ então $\Delta, A \vdash F$.

3.2. Se $\Gamma \nvdash F$, então há um conjunto Δ F-saturado tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

Demonstração: Seja $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ uma enumeração de $\mathcal{F}$ e tomemos $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_n, ...$ tal que $\Gamma_0 = \Gamma$ e, para $n \geq 1$ seja $\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \cup \{A_n\}$ se $\Gamma_{n-1} \cup \{A_n\} \nvdash F$, caso contrário seja $\Gamma_n = \Gamma_{n-1}$. Agora, tomemos $\Delta = \cup\Gamma_i$ e provemos que Δ satisfaz as condições do teorema, ou seja, que:

(i) $\Gamma \subseteq \Delta$;

(ii) Δ é F-saturado.

Demonstração de (i):

$\Gamma = \Gamma_0$ e $\Gamma_0 \subseteq \cup\Gamma_i = \Delta$, portanto $\Gamma \subseteq \Delta$.

Demonstração de (ii):

Basta provar que:

(a) $\Delta \nvdash F$;

(b) para toda G, se $G \notin \Delta$ então $\Delta, G \vdash F$.

Para provar (a) precisamos demonstrar anteriormente o lema que se segue:

Lema: Para todo $j \geq 0$, $\Gamma_j \nvdash F$.

Demonstração do lema (por indução em j):

Base: $j = 0$

$\Gamma_0 = \Gamma$ e, por hipótese, $\Gamma \nvdash F$; logo, $\Gamma_0 \nvdash F$.

Passo indutivo: Assumamos que $\Gamma_{i-1} \nvdash F$ e provemos que $\Gamma_i \nvdash F$.

Caso 1: $\Gamma_i = \Gamma_{i-1}$

Pela hipótese da indução, $\Gamma_i \nvdash F$.

Caso 2: $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{A_i\}$

Por construção, $\Gamma_i \nvdash F$.

Demonstração de (a) (por absurdo):

Assumamos que $\Delta \vdash F$; então, para algum subconjunto Δ' finito de Δ, temos, pela definicão de dedução, que $\Delta' \vdash F$; e para algum $i \geq 0$, $\Delta' \subseteq \Gamma_i$; neste caso, $\Gamma_i \vdash F$, o que contraria o lema; portanto, $\Delta \nvdash F$.

Demonstração de (b):

Suponhamos que $G \notin \Delta$; por construção, para algum i, $G = A_i$ e $\Gamma_{i-1} \cup \{G\} \vdash F$. Como $\Gamma_{i-1} \subseteq \Delta$, pela definiçao de dedução, $\Delta \cup \{G\} \vdash F$.

Portanto, Δ é um conjunto F-saturado tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

3.3. Se Δ é F-saturado, então $A \in \Delta$ se e somente se $\Delta \vdash A$.

Demonstração:

Suponhamos que $A \in \Delta$; então, pela definição de dedução, temos que $\Delta \vdash A$. Agora, suponhamos que $\Delta \vdash A$; e, além disso, suponhamos, por absurdo, que $A \notin \Delta$, então, como Δ é F-saturado, $\Delta, A \vdash F$. Logo, pelo teorema da dedução, $\Delta \vdash A \supset F$. Aplicando A3, $\Delta \vdash F$, o que contraria a hipótese.

3.4. Se Δ é F-saturado, então:

(a) $\neg A \in \Delta \Rightarrow A \notin \Delta$;

(b) $A \wedge B \in \Delta \Leftrightarrow A, B \in \Delta$;

(c) $A \vee B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$;

(d) $A \supset B \notin \Delta \Rightarrow B \notin \Delta$;

(e) $A \supset B \in \Delta \Rightarrow A \notin \Delta$ ou $B \in \Delta$;

Demonstração:

Demonstração de (a):

Suponhamos que $\neg A \in \Delta$; dado que Δ é F-saturado, por 3.3., $\Delta \vdash \neg A$. Suponhamos, por absurdo, que $A \in \Delta$; logo, por 3.3., $\Delta \vdash A$. Além disso, como $\neg A \supset (A \supset F)$ é axioma, pela definição de dedução, $\Delta \vdash \neg A \supset (A \supset F)$ e, por duas aplicações de A3, obtemos que $\Delta \vdash F$; pela definição 3.1., Δ não é F-saturado, o que contraria a hipótese. Logo, $A \notin \Delta$.

Demonstração de (b):

Assumamos que $(A \wedge B) \in \Delta$; dado que Δ é F-saturado, por 3.3., $\Delta \vdash (A \wedge B)$; como $(A \wedge B) \supset A$ e $(A \wedge B) \supset B$ são axiomas, pela definição de dedução, $\Delta \vdash (A \wedge B) \supset A$ e $\Delta \vdash (A \wedge B) \supset B$; aplicando A3 obtemos, por sua vez, que $\Delta \vdash A$ e $\Delta \vdash B$; como Δ é F-saturado, $A \in \Delta$ e $B \in \Delta$. Agora, suponhamos que $A \in \Delta$ e que $B \in \Delta$; como Δ é F-saturado, por 3.3., $\Delta \vdash A$ e $\Delta \vdash B$; como $A \supset (B \supset (A \wedge B)$ é axioma, $\Delta \vdash (A \supset (B \supset (A \wedge B)))$; aplicando duas vezes A3 obtemos que $\Delta \vdash (A \wedge B)$ e, como Δ é F-saturado , por 3.3., $(A \wedge B) \in \Delta$.

Demonstração de (c):

Suponhamos que $A \vee B \in \Delta$ e que $A \notin \Delta$;como Δ é F-saturado, por 3.3., $\Delta \vdash A \vee B$; e, por 3.1, $\Delta, A \vdash F$; logo, pelo teorema da dedução, $\Delta \vdash A \supset F$; agora, suponhamos, por absurdo, que $B \notin \Delta$; como Δ é F-saturado, por 3.1., $\Delta, B \vdash F$; logo, pelo teorema da dedução, $\Delta \vdash B \supset F$. Como $(A \supset F) \supset ((B \supset F) \supset ((A \vee B) \supset F))$ é um axioma, $\Delta \vdash (A \supset F) \supset ((B \supset F) \supset ((A \vee B) \supset F))$; aplicando A3 três vezes obtemos que $\Delta \vdash F$, o que contraria a hipótese; segue-se, então, que $B \in \Delta$. Agora, suponhamos que $A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$; como Δ é F-saturado, por 3.3.,

$\Delta \vdash A$ ou $\Delta \vdash B$; suponhamos que $\Delta \vdash A$; como $A \supset (A \vee B)$ é axioma, $\Delta \vdash A \supset (A \vee B)$; logo, aplicando A3, obtemos que $\Delta \vdash A \vee B$; suponhamos que $\Delta \vdash B$; como $B \supset (A \vee B)$ é axioma, temos, por sua vez, que $\Delta \vdash B \supset (A \vee B)$; logo, aplicando A3, obtemos que $\Delta \vdash A \vee B$. Portanto, $\Delta \vdash A \vee B$; logo, por 3.3., $A \vee B \in \Delta$.

Demonstração de (d):

Suponhamos que $B \in \Delta$; como Δ é F-saturado, por 3.3., $\Delta \vdash B$; além disso, como $B \supset (A \supset B)$ é axioma, $\Delta \vdash B \supset (A \supset B)$; aplicando A3, obtemos que $\Delta \vdash (A \supset B)$ e, como Δ é F-saturado, por 3.3., $(A \supset B) \in \Delta$.

Demonstração de (e):

Assumamos $A \supset B \in \Delta$ e $A \in \Delta$; como Δ é F-saturado, por 3.3., $\Delta \vdash A \supset B$ e $\Delta \vdash A$; logo, aplicando A3, $\Delta \vdash B$; portanto, por 3.3., $B \in \Delta$.

3.5.(a). Se Δ é F-saturado e $A_n^{\supset} \notin \Delta$, então há um conjunto Δ' A_n-saturado tal que, $\Delta \cup \{A_1, ..., A_{n-1}\} \subseteq \Delta'$.

Demonstração:

Suponhamos que Δ é F-saturado e que $A_n^{\supset} \notin \Delta$; por 3.3., $\Delta \nvdash A_n^{\supset}$; pelo teorema da dedução, $\Delta \cup \{A_1, ..., A_{n-1}\} \nvdash A_n$. Portanto, por 3.2., há um conjunto Δ' A_n-saturado tal que $\Delta \cup \{A_1, ..., A_{n-1}\} \subseteq \Delta'$.

3.5.(b). Se Δ é F-saturado, $A_n^{\supset} \notin \Delta$ e A_n tem a forma $\neg B$ então há um conjunto Δ' A_n-saturado tal que $\Delta \cup \{A_1, ..., A_{n-1}, B\} \subseteq \Delta'$.

Demonstração:

Por 3.5.(a), há um conjunto Δ' $\neg B$-saturado tal que $\Delta \cup \{A_1, ..., A_{n-1}\} \subseteq \Delta'$. Provemos, agora, que $B \in \Delta'$. Suponhamos, por absurdo, que $B \notin \Delta'$; como Δ' é $\neg B$-saturado, por 3.1., $\Delta', B \vdash \neg B$; logo, pelo teorema da dedução, $\Delta' \vdash B \supset \neg B$; ora, $\Delta' \vdash B \supset B$; como $(B \supset B) \supset ((B \supset \neg B) \supset \neg B)$ é axioma, aplicando A3 duas vezes, obtemos que $\Delta' \vdash \neg B$, o que não é possível, uma vez que Δ' é $\neg B$-saturado.

4. Correção e Completude

Correção

4.1. Se v é uma valoração e $v(A_n^{\supset}) = 0$, então há uma semi-valoração s, normal para A_n, tal que, para $1 \leq i < n$, $s(A_i) = 1$ e $s(A_n) = 0$.

Demonstração:

Para algum $m \geq 1$, $A_n = B_{(m)}^{\supset}$. Então, $A_n^{\supset}$ pode ser escrita como $(A_1 \supset (\ldots \supset (A_{n-1} \supset (B_1 \supset (\ldots \supset (B_{m-1} \supset B_m) \ldots)$; como $v(A_n) = 0$, pela definição 2.2., há uma semi-valoração s, normal para A_n, tal que para $1 \leq i < n$ e $1 \leq i' < m$, $s(A_i) = s(B_{i'}) = 1$ e $s(B_m) = 0$. Aplicando várias vezes a condição (e) de 2.1., obtemos que $s(B_{(m)}) = 0$; visto que $B_{(m)}^{\supset} = A_n$, temos, assim, $s(A_i) = 1$ para $1 \leq i < n$ e $s(A_n) = 0$.

4.2. Dizemos que n é o *grau implicativo de um esquema de axiomas* S de LI se, e somente se há uma instância de S da forma $A_{(n)}^{\supset}$ e para todo $m < n$ não há nenhuma instância de S da forma $B_{(m)}^{\supset}$.

4.3. Se n é o grau implicativo de um esquema de axiomas S de LI e $A_n^{\supset}$ é uma instância de S então nenhuma semi-valoração s, normal para A_n, é tal que, para $1 \leq i < n$, $s(A_i) = 1$ e $s(A_n) = 0$.

Demonstração:

Seja s uma semi-valoração normal para A_n.

O grau implicativo de A1 é 3 e uma instância $A_3^{\supset}$ é da forma $A_1 \supset (A_2 \supset A_3)$, onde A_1 é igual a A_3. Dessa forma, se $s(A_1) = 1$ e $s(A_2) = 1$ temos, obviamente, que $s(A_3)=1$.

O grau implicativo de A2 é 4 e uma instância $A_4^{\supset}$ é da forma $A_1 \supset (A_2 \supset (A_3 \supset A_4))$, onde A_1, A_2, A_3 e A_4 são, respectivamente, da forma $B_1 \supset B_2$, $B_1 \supset (B_2 \supset B_3)$, B_1 e B_3.

Assumamos que $s(A_1) = s(A_2) = s(A_3) = 1$, ou seja, que $s(B_1 \supset B_2) = s(B_1 \supset (B_2 \supset B_3)) = s(B_1) = 1$; segue-se de 2.1.(e), que $s(B_3) = 1$. Portanto, $s(A_4) = 1$.

O grau implicativo de A4 é 2 e uma instância $A_2^{\supset}$ é da forma $A_1 \supset A_2$, onde A_1 e A_2 são, respectivamente, da forma $B_1 \wedge B_2$ e B_1. Assumamos que $s(A_1) = 1$, ou seja, que $s(B_1 \wedge B_2) = 1$; por 2.1.(b), $s(B_1) = 1$. Portanto, $s(A_2) = 1$.

O grau implicativo de A5 é 2 e uma instância $A_2^{\supset}$ é da forma $A_1 \supset A_2$, onde A_1 e A_2 são, respectivamente, da forma $B_1 \wedge B_2$ e B_2. Assumamos que $s(A_1) = 1$, ou seja, que $s(B_1 \wedge B_2) = 1$; por 2.1.(b), $s(B_2) = 1$. Portanto, $s(A_2) = 1$.

O grau implicativo de A6 é 3 e uma instância $A_3^{\supset}$ é da forma $A_1 \supset (A_2 \supset A_3)$, onde A_1, A_2 e A_3 são, respectivamente, da forma B_1, B_2 e $B_1 \wedge B_2$. Assumamos que $s(A_1) = s(A_2) = 1$, ou seja, que $s(B_1) = s(B_2) = 1$; por 2.1.(b), $s(B_1 \wedge B_2) = 1$. Portanto, $s(A_3) = 1$.

O grau implicativo de A7 é 2 e uma instância $A_2^{\supset}$ é da forma $A_1 \supset A_2$, onde A_1 e A_2 são respectivamente, da forma B_1 e $B_1 \vee B_2$. Assumamos que $s(A_1) = 1$, ou seja, que $s(B_1) = 1$; por 2.1.(c), $s(B_1 \vee B_2) = 1$. Portanto, $s(A_2) = 1$.

O grau implicativo de A8 é 2 e uma instância $A_2^{\supset}$ é da forma $A_1 \supset A_2$, onde A_1 e A_2 são respectivamente, da forma B_2 e $B_1 \vee B_2$. Assumamos que $s(A_1) = 1$, ou seja, que $s(B_1) = 1$; por 2.1.(c), $s(C_1 \vee C_2) = 1$. Portanto, $s(A_2) = 1$.

O grau implicativo de A9 é 4 e uma instância $A_4^{\supset}$ é da forma $A_1 \supset (A_2 \supset (A_3 \supset A_4))$, onde A_1, A_2, A_3 e A_4 são, respectivamente, da forma $B_1 \supset B_3$, $B_2 \supset B_3$, $B_1 \vee B_2$ e B_3. Assumamos que $s(A_1) = s(A_2) = s(A_3) = 1$, ou seja, que $s(B_1 \supset B_3) = s(B_2 \supset B_3) = s(B_1 \vee B_2) = 1$; por 2.1.(e), $s(B_1) = 0$ ou $s(B_3) = 1$ e, além disso, $s(B_2) = 0$ ou $s(B_3) = 1$ e, por 2.1.(c), $s(B_1) = 1$ ou $s(B_2) = 1$; por absurdo, assumamos que $s(B_3) = 0$; segue-se que $s(B_1) = s(B_2) = 0$ e $s(B_1) = 1$ ou $s(B_2) = 1$. Logo, $s(B_1) = s(B_2) = 0$ e $s(B_1) = 1$ ou, $s(B_1) = s(B_2) = 0$ e $s(B_2) = 1$, que é uma contradição. Portanto, $s(B_3) = 1$; assim, $s(A_4) = 1$.

O grau implicativo de A10 é 3 e uma instância $A_3^{\supset}$ é da forma $A_1 \supset (A_2 \supset A_3)$, onde A_1, A_2 e A_3 são, respectivamente, da forma $B_1 \supset B_2$, $B_1 \supset \neg B_2$ e $\neg B_1$. Assumamos que $s(A_1) = s(A_2) = 1$, ou seja, que $s(B_1 \supset B_2) = s(B_1 \supset \neg B_2) = 1$; por 2.1.(e), $s(B_1) = 0$ ou $s(B_2) = 1$ e, além disso, $s(B_1) = 0$ ou $s(\neg B_2) = 1$; logo, $s(B_1) = 0$ ou $s(B_2) = s(\neg B_2) = 1$; por 2.1.(a), $s(B_1) = 0$ ou, $s(B_2) = 1$ e $s(B_2) = 0$; assim, $s(B_1) = 0$. Como s é normal para A_3 e A_3 é da forma $\neg B_1$, pela definição 2.2., $s(\neg B_1) = 1$. Portanto, $s(A_3) = 1$.

O grau implicativo A11 é 3 e uma instância $A_3^{\supset}$ é da forma $A_1 \supset (A_2 \supset A_3)$, onde A_1, A_2 e A_3 são, respectivamente, da forma $\neg B_1$, B_1 e B_2. Assumamos que $s(A_1) = s(A_2) = 1$, ou seja, que $s(\neg B_1) = s(B_1) = 1$; por 2.1.(a), $s(B_1) = 0$ e $s(B_1) = 1$, que é uma contradição.

4.4. $\Gamma \vdash F \Rightarrow \Gamma \models F$.

Demonstração (por indução no número de linhas de uma dedução de F a partir de Γ):

Seja $A_1 \ldots A_n$ uma dedução de F a partir de Γ.

Base: $i = 1$.

Caso 1: $A_i \in \Gamma$

Toda valoração v que é modelo de Γ, ou seja, que atribui 1 a todas as fórmulas de Γ, atribui, em particular, 1 a A_i. Temos, então, pela definição 2.5., que $\Gamma \models A_i$.

Caso 2: A_i é um esquema de axiomas

Por 4.3, se n é o grau implicativo de um esquema de axiomas S de L I e $A_n^{\supset}$ é uma instância de S, então nenhuma semi-valoração s, normal para A_n, é tal que, para $1 \leq j < n$, $s(A_j) = 1$ e $s(A_n) = 0$; por 4.1., para toda valoração v, $v(A_n^{\supset}) = 1$. Portanto, para toda valoração v que é modelo de Γ, $v(A_i) = 1$, ou seja, $\Gamma \models A_i$.

Passo indutivo: Assumamos que a propriedade vale para os A_t's tais que $t < i$ e provemos que vale para A_i.

Caso 1: $A_i \in \Gamma$

Demonstração análoga a da base.

Caso 2: A_i é um esquema de axiomas

Demonstração análoga a da base.

Caso 3: Existem $k,j < i$ tais que A_k é $(A_j \supset A_i)$

Assim, $\Gamma \vdash A_j$ e $\Gamma \vdash A_j \supset A_i$ e, pela hipótese da indução, $\Gamma \models A_j$ e $\Gamma \models A_j \supset A_i$, ou seja, para toda valoração v, se v $\Vdash \Gamma$ então $v(A_j) = v(A_j \supset A_i) = 1$; por 2.1.(e), $v(A_i) = 1$. Logo, para toda valoração v, se v $\Vdash \Gamma$ então $v(A_i) = 1$. Portanto, $\Gamma \models A_i$.

Completude

4.5. A função caracteristica de um conjunto F-saturado é uma semi-valoração.

Demonstração:

Seja f_Δ a função caracteristica de um conjunto Δ F-saturado. Para provarmos que f_Δ é uma semi-valoração devemos provar que:

(i) $f_\Delta(\neg A) = 1 \Rightarrow f_\Delta(A) = 0$;

(ii) $f_\Delta(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow f_\Delta(A) = f_\Delta(B) = 1$;

(iii) $f_\Delta(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow f_\Delta(A) = 1$ ou $f_\Delta(B) = 1$;

(iv) $f_\Delta(A \supset B) = 0 \Rightarrow f_\Delta(B) = 0$;

(v) $f_\Delta(A \supset B) = 1 \Leftrightarrow f_\Delta(A) = 0$ ou $f_\Delta(B) = 1$.

Demonstração de (i):

Seja $f_\Delta(\neg A) = 1$; pela definição de função caracteristica de um conjunto, $\neg A \in \Delta$; por 3.4.(a), $A \notin \Delta$; e, novamente pela definição de função caracteristica de um conjunto, $f_\Delta(A) = 0$.

Demonstração de (ii):

Seja $f_\Delta(A \wedge B) = 1$; logo, $(A \wedge B) \in \Delta$; por 3.4.(b), $A \in \Delta$ e $B \in \Delta$; portanto, $f_\Delta(A) = f_\Delta(B) = 1$. A conversa se segue também da definição de funcão caracteristica de um conjunto dado e de 3.4.(b), obviamente.

Demonstração de (iii):

Seja $f_\Delta(A \vee B) = 1$; logo, $(A \vee B) \in \Delta$; por 3.4.(c), $A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$; portanto, $f_\Delta(A) = 1$ ou $f_\Delta(B) = 1$. A conversa se segue também da definição de função caracteristica de um conjunto dado e de 3.4.(c), obviamente.

Demonstração de (iv):

Seja $f_\Delta(A \supset B) = 0$; logo, $(A \supset B) \notin \Delta$; por 3.4.(d), $B \notin \Delta$; portanto, $f_\Delta(B) = 0$.

Demonstração de (v):

Seja $f_\Delta(A \supset B) = 1$; logo, $(A \supset B) \in \Delta$; por 3.4.(e), $A \notin \Delta$ ou $B \in \Delta$; portanto, $f_\Delta(A) = 0$ ou $f_\Delta(B) = 1$. A conversa se segue também da definição de função caracteristica de um conjunto dado e de 3.4.(e).

Portanto, por 2.1., f_Δ é uma semi-valoração.

4.6. A função caracteristica de um conjunto F-saturado é uma valoração.

Demonstração:

Seja f_Δ a função caracteristica de um conjunto Δ F-saturado; por 4.5., vimos que f_Δ é uma semi-valoração. Agora, suponhamos $n \geq 0$ e $f_\Delta(A_{(n)}{}^{\supset}) = 0$; logo, $A_{(n)}{}^{\supset} \notin \Delta$; por 3.5.(a), há um conjunto Δ' A_n-saturado tal que $\Delta \cup \{A_1, ..., A_{n-1}\} \subseteq \Delta'$; assim, $f_{\Delta'}(A_i) = 1$ para $1 \leq i \leq n-1$ e, como $\Delta' \nvdash A_n$, por 3.3., $A_n \notin \Delta'$; logo, $f_{\Delta'}(A_n) = 0$. E, se A_n é da forma $\neg B$, por 3.5.(b), $B \in \Delta'$; logo, $f_{\Delta'}(B) = 1$. Além disso, por 4.5., $f_{\Delta'}$ é uma semi-valoração; logo, se $f_{\Delta'}(\neg B) = 1$ então $f_{\Delta'}(B) = 0$; assim, $f_{\Delta'}(\neg B) \neq f_{\Delta'}(B)$. Portanto, $f_{\Delta'}$ é uma semi-valoração normal para A_n, o que demonstra ser f_Δ uma valoração.

4.7. $\Gamma \nvdash F \Rightarrow \Gamma \nvDash F$

Suponhamos que $\Gamma \nvdash F$; por 3.2., há um conjunto Δ F-saturado tal que $\Gamma \subseteq \Delta$; como Δ é F-saturado, $\Delta \nvdash F$ e, por 3.3., $F \notin \Delta$. Seja, agora, f_Δ a função caracteristica de Δ; como $\Gamma \subseteq \Delta$, $f_\Delta(A) = 1$ para toda $A \in \Gamma$; por outro lado, como $F \notin \Delta$, $f_\Delta(F) = 0$. Além disso, por 4.6., f_Δ é uma valoração. Assim, temos uma valoração, a saber, f_Δ, tal que $f_\Delta(A) = 1$ para toda $A \in \Gamma$ e $f_\Delta(F) = 0$, logo $\Gamma \nvDash F$.

4.8. $\Gamma \vdash F \Leftrightarrow \vDash F$

Demonstração: segue-se diretamente de 4.4. e 4.7..

IV. Próximas atividades

A seguir, pretendemos:

(i) quanto a minha formação em lógica,

(a) continuar participando dos seminários sobre Mendelson [9];

(b) ler os dois últimos capítulos da Parte II de Smullyan [10].

(ii) ler os artigos [5], [6], [7], [8] e [3].

(iii) quanto à LI: formular o procedimento de decisão e demonstrar que este reflete a respectiva semântica de valoração;

(iv) quanto ao S4: desenvolver a semântica de valoração, bem como o método de decisão nela baseado.

V. Prazo do projeto

Considerando o andamento do projeto até então, esperamos cumprir - no prazo - senão integralmente, pelo menos oitenta por cento dos objetivos iniciais, faltando, talvez, a formulação do procedimento de decisão para S4.

VI. Referências Bibliográficas

[1] Chellas, B. F. [1990]: *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge University Press.

[2] Kleene, S. C. [1967]: *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Publishing CO. - Amsterdam, P. Noordhoff N. V. - Groningen.

[3] Kripke, S. A. [1963]: "Semantical Analysis of Modal Logic, I", *Normal Propositional Calculus,* 9, pp. 67-96.

[4] Loparic, A. M. A. de C. [1986]: "A Semantical Study of Some Propositional Calculi", *The Journal of Non-Classical Logic*, *3*, pp.73-95.

[5] Loparic, A. M. A. de C. [1977]: "Une Étude Sémantique de Quelques Calculs Propositionnels', *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris.*

[6] Loparic, A. M. A. de C. & Da Costa, N. C. A. [1984]: "Paraconsistency, Paracompleteness and Valuations", *Logique et Analyse,* 106, pp. 119-131.

[7] Loparic, A. M. A. de C. [1977]: "The Method of Valuations in Modal Logic". In: Arruda, A. I., Da Costa, N. C. A., Chuaqui, R. (org.) *Mathematical Logic: Proceedings of the First Brazilian Conference*. New York: Marcel Dekker.

[8] Loparic, A. M. A. de C. & Mortari, C. A. [1983]: "Valuations in Temporal Logic", *The Journal of Non-Classical Logic,* 2, pp. 49-60.

[9] Mendelson, E. [1987]: *Introduction to Mathematical Logic*, 3a. Edição, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, California.

[10] Smullyan, R. M. [1968]: *First-Order Logic*. Berlim: Springer-Verlag.

Gilmar de Moraes

Gilmar de Moraes

Loparic

Profa. Dra. Andréa Maria Altino de Campos Loparic