UM ESTUDO SEMÂNTICO
DE ALGUNS CÁLCULOS PROPOSICIONAIS

ANDRÉA LOPARIĆ.

UM ESTUDO SEMÂNTICO DE ALGUNS CÁLCULOS PROPOSICIONAIS.

INTRODUCÃO: Nesse trabalho, apresentamos uma semântica e um método de decisão para alguns cálculos proposicionais nos quais vale o teorema da dedução mas não vale a lei de Peirce. Desenvolvemos o trabalho para o cálculo C_ω, de N. da Costa, partindo de uma questão levantada por N. da Costa e E. Alves em [1]. Na conclusão desse artigo indicamos como os resultados obtidos para C_ω podem ser facilmente adaptados para outros cálculos proposicionais.

§ 1. O CÁLCULO PROPOSICIONAL C_ω.

C_ω é um cálculo proposicional cuja linguagem consiste em: 1) um conjunto infinito (enumerável) de variáveis proposicionais, $p, q, r, p', q', r', p'', \ldots$; 2) os conectivos $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção) e $\rightarrow$ (implicação); 3) os parênteses, como símbolos auxiliares. As noções de fórmula atômica, fórmula, as de axioma, regra, postulado, tese e dedução são definidas como as correspondentes, para o cálculo proposicional clássico, em Kleene [2]. Análogo é também o uso do símbolo metalinguístico $\vdash$. De modo geral, usaremos letras maiúsculas latinas como variáveis metalinguísticas para fórmulas e letras maiúsculas gregas como variáveis metalinguísticas para conjuntos de fórmulas. São os seguintes os postulados de C_ω:

1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$; 2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$; 3) $A, A \rightarrow B / B$
4) $A \wedge B \rightarrow A$; 5) $A \wedge B \rightarrow B$; 6) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$; 7) $A \rightarrow (A \vee B)$; 8) $B \rightarrow (A \vee B)$
9) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$; 10) $A \vee \neg A$; 11) $\neg\neg A \rightarrow A$.

No cálculo C_ω, vale o teorema da dedução mas não vale a lei de Peirce [3]; não há negação forte em C_ω [4] e nenhum teorema é da forma $\neg A$ [5]; C_ω não é finitamente trivializável [6], não é decidível por matrizes finitas [7], mas é decidível [8].

CONVENCÕES TERMINOLÓGICAS: Em todo o trabalho, empregaremos $\Rightarrow$ como símbolo metalinguístico para a implicação lógica, $\Leftrightarrow$ para a equivalência lógica; $\mathcal{F}$ denotará o conjunto de todas as fórmulas de $\mathcal{C}_\omega$; $\vec{F}_n$ abrevia $F_n \to (F_{n-1} \to \ldots \to (F_2 \to F_1)..)$ onde, para $1 \leq m \leq n$, F_m é uma fórmula qualquer; $\vec{F}_n^{(1)}$ abrevia $F_n \to (F_{n-1} \to \ldots \to (F_2 \to F_1)\ldots)$ onde, para $1 < m \leq n$, F_m é qualquer mas F_1 não é da forma $F' \to F''$.

§ 2. SEMI-VALIDAÇÕES E VALIDAÇÕES PARA $\mathcal{C}_\omega$.

DEFINIÇÃO DE SEMI-VALIDAÇÃO: Uma semi-validação s é uma função de $\mathcal{F}$ em $\{0,1\}$ tal que:

1) $s(\neg A) = 0 \Rightarrow s(A) = 1$; 2) $s(\neg\neg A) = 1 \Rightarrow s(A) = 1$; 3) $s(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow s(A) = s(B) =$
4) $s(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow s(A) = 1$ ou $s(B) = 1$; 5) $s(A \to B) = 0 \Rightarrow s(B) = 0$; 6) $s(A \to B) = 1 \Rightarrow s(A) = 0$ ou $s(B$

DEFINIÇÃO DE VALIDAÇÃO: v é uma validação se v é uma semi-validação
7) para todo $n \geq 0$, se $v(\vec{A}_n^{(1)}) = 0$, então, existe s, s é uma semi-valida
para todo i, $n \geq i > 1$, $s(A_i) = 1$ e $s(A_1) = 0$.

Uma validação é _singular_ se, para algum A, $v(A) = v(\neg A) = 1$; v é _diferenciada em $A \to B$_ se $v(A) = v(A \to B) = 0$; v é _diferenciada_, se para algum A, algum B, v é diferenciada em $A \to B$. Se uma validação não é singular nem diferenciada, ela é dita _normal_. Dizemos que v é um _modelo de A_ [em símbolos, $v \models A$], se v é uma validação e $v(A) = 1$; dizemos que uma _validação_ v é um modelo de Γ [em símbolos, $v \models \Gamma$], se para qualquer $A \in \Gamma$, $v \models A$. Dizemos que A é _válida_ [em símbolos, $\models A$] se, para toda validação v, $v \models A$; e dizemos que uma consequência semântica de Γ [em símbolos, $\Gamma \models A$], se para toda validação v, se $v \models \Gamma$, $v \models A$.

§ 3. CONJUNTOS F-SATURADOS EM $\mathcal{C}_\omega$.

DEFINIÇÃO 1. Δ é um conjunto F-saturado se para toda F', $F' \in \Delta$ sse $\Delta \cup \{F'\} \nvdash F$.

LEMA: Se $\Gamma \nvdash F$, existe Δ, $\Gamma \subset \Delta$ e Δ é F-saturado.

Prova: Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ uma enumeração de $\mathcal{F}$ e sejam Γ, F, tais que $\Gamma \nvdash F$. Sejam $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ tais que: $\Gamma_0 = \Gamma$ e para $n \geq 1$, se $\Gamma_{n-1} \cup \{A_n\} \vdash F$, então, $\Gamma_n = \Gamma_{n-1}$ e se $\Gamma_{n-1} \cup \{A_n\} \nvdash F$, então, $\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \cup \{A_n\}$; seja $\Delta = \bigcup \Gamma_i$. Claramente, $\Gamma \subset \Delta$. Tomemos uma fórmula qualquer F'; se $F' \in \Delta$, $\Delta \cup \{F'\} \vdash F$, então, $\Delta \vdash F$ e existe um subconjunto finito α, de Δ, tal que $\alpha \vdash F$. Seja A_j uma fórmula da enumeração acima, tal que $A_j \in \alpha$ e, para todo $i > j$, $A_i \notin \alpha$. Então, $\alpha \subset \Gamma_j$ e $\Gamma_j \vdash F$. Mas, por construção, $\Gamma_j \nvdash F$. Logo, se $F' \in \Delta$, então $\Delta \cup \{F'\} \nvdash F$. Enfim, suponhamos que $F' \notin \Delta$. Como, para algum k, $F' = A_k$, $F' \notin \Gamma_k$; mas, nesse caso, $\Gamma_{k-1} \cup \{F'\} \vdash F$. Logo, $\Delta \cup \{F'\} \vdash F$. Portanto, Δ é F-saturado.

TEOREMA 1: Se Δ é F-saturado, então, $\Delta \vdash A$ sse $A \in \Delta$.

Prova: a) Se $A \in \Delta$, então $\Delta \vdash A$;

b) Seja Δ F-saturado; se $A \notin \Delta$, então, $\Delta \cup \{A\} \vdash F$; portanto, se $\Delta \vdash A$ então, $\Delta \vdash F$; como $\Delta \nvdash F$, $\Delta \nvdash A$. Logo, se $\Delta \vdash A$, $A \in \Delta$.

Se Δ é F-saturado, temos que:

COROLÁRIO 1: $\neg A \notin \Delta \Rightarrow A \in \Delta$.

Prova: Em $\mathcal{C}_\omega$ vale $\vdash (\neg A \to F) \to ((A \to F) \to F)$; se $\neg A \notin \Delta$, $\Delta \vdash \neg A \to F$; e se $A \notin \Delta$, $\Delta \vdash A \to F$; portanto se $\neg A \notin \Delta$ e $A \notin \Delta$, $\Delta \vdash F$; como $\Delta \nvdash F$, se $\neg A \notin \Delta$, então $A \in \Delta$.

COROLÁRIO 2: $\neg\neg A \in \Delta \Rightarrow A \in \Delta$.

COROLÁRIO 3: $A \wedge B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta,\ B \in \Delta$.

COROLÁRIO 4: $A \vee B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$.

COROLÁRIO 5: $A \to B \notin \Delta \Rightarrow B \notin \Delta$.

COROLÁRIO 6: $A \to B \in \Delta \Rightarrow A \notin \Delta$ ou $B \in \Delta$.

COROLÁRIO 7: Se $\vec{A}_n \notin \Delta$, então, para cada i, $n \geq i > 1$, existe Δ', Δ' é $\vec{A}_{i-1}$-saturado e $\Delta \cup \{A_n, \dots, A_i\} \subset \Delta'$.

Prova: segue do lema anterior e do fato de que se $\vec{A}_n \notin \Delta$, para $n \geq i > 1$, $\Delta \cup \{A_n, \dots, A_i\} \nvdash \vec{A}_{i-1}$.

§ 4. CORREÇÃO DA SEMÂNTICA.

LEMA 1: Se $\nvDash \vec{A}_n$, então existe uma semi-validação s, tal que, para todo i, $n \geq i > 1$, $s(A_i) = 1$ e $s(A_1) = 0$.

Prova: se $\nvDash \vec{A}_n$, existe v, v é uma validação e $v(\vec{A}_n) = 0$. Ora, para algum $m \geq 1$, A_1 é da forma $\vec{B}_m^{(1)}$. Então, pela definição de validação, existe uma semi-validação s, tal que $s(A_n) = \dots = s(A_2) = s(B_m) = \dots = s(B_2) = 1$ e $s(B_1) = 0$. Mas, em virtude da condição 6 da definição de semi-validação, nesse caso, $s(\vec{B}_m^{(1)}) = 0$ e, assim, para todo i, $n \geq i > 1$, $s(A_i) = 1$ e $s(A_1) = 0$.

DEFINIÇÃO 1: n é o número implicativo de um esquema $\mathcal{E}$ se toda fórmula A que é uma fórmula do esquema $\mathcal{E}$, é da forma $\vec{F}_n$.

LEMA 2: Se $\mathcal{P}$ é um postulado de C_ω, $\vec{F}_n$ é um axioma do esquema $\mathcal{P}$ e n é o número implicativo de $\mathcal{P}$, não existe semi-validação s tal que, para todo i, $n \geq i > 1$, $s(F_i) = 1$ e $s(F_1) = 0$.

Prova: suponhamos a hipótese. Temos 10 casos a examinar:

$\mathcal{P}_1$: $\vec{F_n}$ é da forma $A \to (B \to A)$, $n=3$. Obviamente, não existe semi-validação s tal que $s(A)=s(B)=1$ e $s(A)=0$.

$\mathcal{P}_2$: $\vec{F_n}$ é da forma $(A\to B)\to((A\to(B\to C))\to(A\to C))$, $n=4$. Seja $s(A\to B)=$ $=s(A\to(B\to C))=s(A)=1$; então, pela condição 6 da definição de semi-validação $s(B)=s(B\to C)=1$ e $s(C)=1$.

$\mathcal{P}_4$: $\vec{F_n}$ é da forma $A\wedge B\to A$, $n=2$. Ora, pela condição 3 da definição de semi-validação, se $s(A\wedge B)=1$, $s(A)=1$.

$\mathcal{P}_5$: $\vec{F_n}$ é da forma $A\wedge B\to B$, $n=2$. O caso é análogo ao anterior.

$\mathcal{P}_6$: $\vec{F_n}$ é da forma $A\to(B\to(A\wedge B))$, $n=3$. Aqui também, pela condição se $s(A)=s(B)=1$, $s(A\wedge B)=1$.

$\mathcal{P}_7$: $\vec{F_n}$ é da forma $A\to A\vee B$, $n=2$. Pela condição 4 da mesma definição se $s(A)=1$, $s(A\vee B)=1$.

$\mathcal{P}_8$: $\vec{F_n}$ é da forma $A\to B\vee A$, $n=2$. O caso é análogo ao anterior.

$\mathcal{P}_9$: $\vec{F_n}$ é da forma $(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$, $n=4$. Se $s(A\to C)=$ $=s(B\to C)=s(A\vee B)=1$, pela condição 4, $s(A)=1$ ou $s(B)=1$. Então, pela condição 6, em qualquer dos casos, $s(C)=1$.

$\mathcal{P}_{10}$: $\vec{F_n}$ é da forma $A\vee\neg A$, $n=1$. Se $s(\neg A)=1$, pela condição 4, da definição de semi-validação, $s(A\vee\neg A)=1$; se $s(\neg A)=0$, pela condição 1, $s(A)=1$ e, pela condição 4, $s(A\vee\neg A)=1$.

$\mathcal{P}_{11}$: $\vec{F_n}$ é da forma $\neg\neg A\to A$, $n=2$. Pela condição 2, da definição de semi-validação, se $s(\neg\neg A)=1$, $s(A)=1$.

Portanto, em todos os casos, a proposição se verifica.

COROLÁRIO: Se F é um axioma de $\mathcal{C}_\omega$, $\vDash F$

Prova: Seja F um axioma de $\mathcal{C}_\omega$. Então existe $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ é um postulado de $\mathcal{C}_\omega$ e F é uma fórmula do esquema $\mathcal{P}$. Seja n o número implicativo de $\mathcal{P}$. Então F é da forma $\vec{A_n}$ e, pelo lema 2, não existe semi-validação s tal que para todo i, $n\geq i>1$, $s(A_i)=1$ e $s(A_1$ Portanto, pelo lema 1, $\vDash\vec{A_n}$, ou seja, $\vDash F$.

TEOREMA DA CORREÇÃO: Se $\vdash F$ então $\vDash F$.

Prova: Por indução em teoremas. Se F é um axioma, pelo corolário do lem

$\models F$. Se F foi obtido por $\mathcal{B}_3$ (Modus Ponens) a partir de F', $F' \to F$, então $\vdash F'$, $\vdash F' \to F$ e, por hipótese indutiva, $\models F'$, $\models F' \to F$. Seja v uma validação; então $v(F') = v(F' \to F) = 1$. Como v é uma semi-validação, pela condição 6, $v(F) = 1$. Mas v é uma validação qualquer. Logo $\models F$.

COROLÁRIO: Se $\Gamma \vdash F$ então $\Gamma \models F$.

Prova: por indução no número de linhas, n, de uma dedução de F a partir de Γ.
$n = 1$. Então $F \in \Gamma$ ou F é um axioma; se $F \in \Gamma$, trivialmente $\Gamma \models F$; se F é um axioma, pelo corolário do lema 2, $\models F$ e, assim $\Gamma \models F$.
$n > 1$. Então se $F \notin \Gamma$ e F não é um axioma, F foi obtido por $\mathcal{B}_3$ a partir de F', $F' \to F$, que ocorrem em linhas anteriores da dedução e $\Gamma \vdash F' \to F$, $\Gamma \vdash F'$. Por hipótese indutiva $\Gamma \models F' \to F$, $\Gamma \models F'$. Seja v uma validação tal que $v \models \Gamma$; então $v(F' \to F) = 1$, $v(F') = 1$. Como v é uma semi-validação, pela condição 6, $v(F) = 1$. Mas v é qualquer. Então $\Gamma \models F$.

§ 5. COMPLETUDE DE $\mathcal{C}_\omega$

LEMA 1: Se Δ é F-saturado e h é a função característica de Δ, h é semi-validação.

Prova: Seja Δ F-saturado e h a função característica de Δ. Usando os corolários 1-6 do teorema 1, secção 3, verifica-se facilmente que h satisfaz todas as condições da definição de semi-validação.

LEMA 2: Se Δ é F-saturado e h é a função característica de Δ, h é uma validação.

Prova: Seja Δ F-saturado e h a função característica de Δ. Pelo lema 1, h é uma semi-validação. Precisamos provar que h satisfaz a condição 7 da definição de validação. Seja, pois, $h(\vec{A}_n^{(1)}) = 0$. Então, $\vec{A}_n^{(1)} \notin \Delta$ e, pelo corolário 7, § 3, seção 3, existe Δ', Δ' é A_1-saturado e $\Delta \cup \{A_n, \ldots, A_2\} \subset \Delta'$. Seja agora h' a função característica de Δ'. Então h' é uma semi-validação, para todo i, $n \geq i > 1$, $h'(A_i) = 1$ e $h'(A_1) = 0$. Assim, como $\vec{A}_n^{(1)}$ era qualquer, h satisfaz a condição 7 e é uma validação.

TEOREMA DA COMPLETUDE FORTE: Se $\Gamma \vDash F$ então $\Gamma \vdash F$

Prova: Suponhamos que $\Gamma \nvdash F$. Então existe Δ, F-saturado, tal que $\Gamma \subset \Delta$. Seja v a função característica de Δ. Então v é uma validação, $v \vDash \Gamma$ e $v \nvDash F$. Logo, $\Gamma \nvDash F$. Portanto, se $\Gamma \vDash F$, $\Gamma \vdash F$.

COROLÁRIO DA COMPLETUDE FRACA: Se $\vDash F$ então $\vdash F$

§ 6. PROPRIEDADES DAS VALIDAÇÕES

PROPRIEDADE 1: Existem validações normais.

Prova: C_ω é estritamente mais fraco que o cálculo proposicional clássico (cf. [ ]). Seja Γ o conjunto das tautologias clássicas; então, em C_ω $\Gamma \nvdash p \wedge \neg p$. Seja Δ um conjunto $p \wedge \neg p$-saturado tal que $\Gamma \subset \Delta$, e v a função característica de Δ. Então v é uma validação. Suponhamos que, para algum F, $v(F) = v(\neg F) = 1$. Então $F \in \Delta$, $\neg F \in \Delta$ e $\Delta \vdash p \wedge \neg p$. Como isso está excluído, para todo F, $v(F) = 1$ sse $v(\neg F) = 0$. Portanto, v não é singular. Suponhamos agora que $v(F') = 0$; então, $v(\neg F') = 1$ e $\neg F' \in \Delta$. Ora, para todo F, $\neg F' \to (F' \to F) \in \Delta$; assim, para todo F, $F' \to F \in \Delta$ e $v(F' \to F) = 1$. Assim, v não é diferenciada. Logo, v é normal.

PROPRIEDADE 2: Existem validações singulares.

Prova: Por meio de matrizes, prova-se facilmente que, em C_ω, $p \wedge \neg p \nvdash \neg(p \wedge$ Tomemos então Δ $\neg(p \wedge \neg p)$ saturado tal que $\{p \wedge \neg p\} \subset \Delta$. Então, a função característica de Δ é uma validação singular.

PROPRIEDADE 3: Existem validações diferenciadas.

Prova: Por meio de matrizes, mostra-se facilmente que, em C_ω, $\nvdash p \vee (p \to q)$. Seja Δ $p \vee (p \to q)$-saturado. Então a função característica de Δ é uma validação diferenciada.

PROPRIEDADE 4: Para toda validação v, seja $\vartheta_v = \{F : v(F) = 1\}$. Então, se v' é uma validação e $v'(A \to B) = 0$, existe v'', $\vartheta_{v'} \cup \{A\} \subset \vartheta_{v''}$ e $B \notin \vartheta_{v''}$

Prova: Suponhamos a hipótese. Então $\vartheta_{v'} \nvdash A \to B$; logo, $\vartheta_{v'} \cup \{A\} \nvdash B$. Logo, existe v'', $\vartheta_{v'} \cup \{A\} \subset \vartheta_{v''}$ e $B \notin \vartheta_{v''}$.

§ 7. Σ-SEQUÊNCIAS

DEFINIÇÃO 1: Para toda fórmula F, $\Sigma_F \underset{def}{=} \{F' : F'$ é uma subfórmula de

DEFINIÇÃO 2: $F_1, \dots, F_k$ é uma Σ-sequência se $k \in \mathbb{N}^+$ e, para todo i, $1 \le i \le$ todo F, se $F \in \Sigma_{F_i}$, existe i', $1 \le i \le i'$, $F = F_i$.

PROPRIEDADE: Se $F_1, \dots, F_k$ é uma Σ-sequência, para $1 \le i \le k$, $F_1, \dots, F_i$ é uma Σ-sequência.

CONVENÇÃO: Se σ é uma sequência qualquer (não necessariamente uma sequência de fórmulas) e ρ é o contradomínio de σ, para indicar que $a \in \rho$, escrevemos $a \,\breve{\in}\, \sigma$.

§ 8. TABELAS PARA $\mathcal{C}_\omega$

DEFINIÇÃO 1: Se $F_1, \dots, F_{k'}$ é uma Σ-sequência, $\mathcal{T}(F_1, \dots, F_{k'})$, a tabela de $F_1, \dots$
é a construção que se obtém em k' etapas tais que:

1. a etapa 1 corresponde à construção de $\mathcal{T}(F_1)$ e é obtida por R1 (veja adiante);
2. para $1 \leq k \leq k'$, a etapa k corresponde à extensão de $\mathcal{T}(F_1, \dots, F_{k-1})$ a $\mathcal{T}(F_1, \dots, F_k)$, de acordo com R2 (veja adiante).

$\boxed{R1}$ _ Se F_1 é uma Σ-sequência, $\mathcal{T}(F_1)$ é a construção formada por duas linhas, a primeira contendo uma ocorrência do valor 1, a segunda contendo uma ocorrência do valor 0.

<u>Addendum</u>: Associamos a $\mathcal{T}(F_1)$ o que chamamos a <u>assinalação</u> de $\mathcal{T}(F_1)$, assim construída:

1.) Associamos $\emptyset$ a F_1;

2.) Indexamos as linhas de $\mathcal{T}(F_1)$ pelo conjunto $\{1, 2\}$, fazendo corresponder à primeira linha o índice 1 e à segunda o índice 2.

3.) Associamos a cada uma das duas linhas a sequência vazia de conjuntos; dizemos então que $\emptyset$ é a <u>sequência associada</u> a cada uma das linhas de $\mathcal{T}(F$

<u>Esquema para $\mathcal{T}(F_1)$</u>: Podemos representar $\mathcal{T}(F_1)$ juntamente com a sua assinalação, da seguinte maneira:

SEQUÊNCIAS ASSOCIADAS	ÍNDICES	$F_1, \emptyset$
$\emptyset$	1	1
$\emptyset$	2	0

CONVENÇÕES TERMINOLÓGICAS: Seja $F_1, \dots, F_{k'}$ uma Σ-sequência.

1) $\mathcal{L}^{k'}$ é o conjunto de todos os índices das linhas de $\mathcal{T}(F_1, \dots, F_{k'})$;

2) Para $1 \leq k \leq k'$ e $j \in \mathcal{L}^{k'}$, ℓ_j^k é a k-tupla ordenada formada pelas primeiras k ocorrê dos valores 0 ou 1 na linha de índice j;

3) Para $1 \leq i \leq k \leq k'$ e $j \in \mathcal{L}^{k'}$, $\ell_j(F_i)$ é a i-ésima coordenada de ℓ_j^k;

4) Para $1 \leq i \leq k \leq k'$, $(\lambda_i)^k$ é o conjunto associado a F_i em $\mathcal{T}(F_1, \dots, F_k)$; se $i = k$, escrevemos também λ_k para $(\lambda_k)^k$.

5) Para $1 \leq k \leq k'$ e $j \in \mathcal{L}^{k'}$, $(\mathcal{C}_j^k)^{k'}$ é o conjunto $\{j' \in \mathcal{L}^{k'} :$ para todo i, $1 \leq i \leq k$, se $\ell_j(F_i) = 1$ então $\ell_{j'}(F_i) = 1\}$; se $k = k'$, escrevemos também $\mathcal{C}_j^{k'}$ para $(\mathcal{C}_j^{k'})^{k'}$;

6) Para $1 \le k \le k'$ e $j \in \mathcal{L}^k$, $(\gamma)^{k,j}$ é a sequência associada a ℓ_j^k;

7) Para $1 \le k \le k'$, $j \in \mathcal{L}^k$, $u(k,j)$ é o número de elementos de $(\gamma)^{k,j}$, $u \ge 0$;

8) Para $1 \le k \le k'$, $j \in \mathcal{L}^k$, $1 \le n \le u(k,j)$, $\gamma_n^{(k,j)}$ é o n-ésimo elemento de $(\gamma)^{k,j}$.

Podemos agora enunciar R2.

$\boxed{R2}$ Se $F_1, \dots, F_{k'}$ é uma Σ-sequência, $k \in \{2, \dots, k'\}$, então se $J(F_1, \dots, F_{k-1})$ está construída e assinalada, e $\mathcal{L}^{k-1} = \{1, \dots, q\}$, para estender $J(F_1, \dots, F_{k-1})$ a $J(F_1, \dots, F_k)$, procedemos de uma das cinco maneiras abaixo, conforme o caso:

I) Se F_k é atômica, fazemos $h_k = \emptyset$ e, para cada $j \in \mathcal{L}^{k-1}$, construímos ℓ_j^k e ℓ_{q+j}^k tais que $\ell_j^{k-1} = \ell_{q+j}^{k-1}$, $\ell_j(F_k) = 1$ e $\ell_{q+j}(F_k) = 0$. (Diremos então que ℓ_{q+j}^k é a k-conjugada de ℓ_j^k).

<u>Addendum</u>: Associamos a $J(F_1, \dots, F_k)$ a sua assinalação, assim construída:

1) Associamos h_k a F_k e, para $1 \le i < k$, fazemos $(h_i)^k = (h_i)^{k-1} \cup \{t : \text{existe } t' \in (h_i)^{k-1} \text{ e } \ell_t^k \text{ é a } k\text{-conjugada de } \ell_{t'}^k\}$;

2) Tomamos $\mathcal{L}^k = \{1, \dots, 2q\}$;

3) Para cada $j \in \mathcal{L}^k$, construímos $(\gamma)^{k,j}$ tal que $u(k,j) = u(k-1,j)$ e

a) se $\ell_j(F_k) = 1$, $(\gamma)^{k,j} = (\gamma)^{k-1,j}$;

b) se $\ell_j(F_k) = 0$, para $1 \le m \le u(k,j)$, $\gamma = \gamma_m^{(k,j)}$ sse existe γ', $\gamma' = \gamma_m^{(k-1,j)}$ e $\gamma = \gamma' \cup \{t : \text{existe } t' \in \gamma' \text{ e } \ell_t^k \text{ é a } k\text{-conjugada de } \ell_{t'}^k\}$.

II) Se F_k é da forma $\neg F'$, fazemos $h_k = \emptyset$, e,

a) Primeiramente, se F_k é da forma $\neg\neg F''$, para cada $j \in \mathcal{L}^{k-1}$, se $\ell_j(F''$ fazemos $\ell_j(F_k) = 0$;

b) Em seguida, para cada $j \in \mathcal{L}^{k-1}$, se $\ell_j(F') = 0$, fazemos $\ell_j(F_k) = 1$;

c) Finalmente, seja $R = \{t \in \mathcal{L}^{k-1} : \ell_t(F_k) \text{ não foi obtida por a) nem por b)}\}$ seja r o número de elementos de R; então aplicamos r vezes o seguinte procedimento: tomamos $j \in R$ tal que para todo $j' \in R$, $j' > j$, tomamos q' tal que $\ell_{q'}^{k-1}$ está construído mas $\ell_{q'+1}^{k-1}$ não está construído, e construímos ℓ_j^k, $\ell_{q'+1}^k$ tais que $\ell_j^{k-1} = \ell_{q'+1}^{k-1}$, $\ell_j(F_k) = 1$, $\ell_{q'+1}($

(Dizemos que ℓ_j^k é k-singular e que $\ell_{q'+1}^k$ é a k-conjugada de ℓ_j^k.)

<u>Addendum</u>: Associamos a $J(F_1, \dots, F_k)$ a sua assinalação, assim construída:

1) Associamos h_k a F_k e, para $1 \le i < k$, fazemos $(h_i)^k = (h_i)^{k-1} \cup \{t : \text{existe } t'$

$t' \in (\lambda_i)^{k-1}$ e l_t^k é a k-conjugada de $l_{t'}^k\}$;

2) Se R tem r elementos, tomamos $\mathcal{Q}^k = \{1, \ldots, q+r\}$;

3) Para cada $j \in \mathcal{Q}^k$, construímos $(\gamma)^{k,j}$ tal que $u(k,j) = u(k-1,j)$ e,

a) se $l_j(F_k) = 1$, $(\gamma)^{k,j} = (\gamma)^{k-1,j}$;

b) se $l_j(F_k) = 0$ e $j \in \mathcal{Q}^{k-1}$, para $1 \leq m \leq u(k,j)$, $\gamma = \gamma_m^{(k,j)}$ sse existe γ', $\gamma' = \gamma_m^{(k-$ e $\gamma = \gamma' \cup \{t$: existe $t' \in \gamma'$ e l_t^k é a k-conjugada de $l_{t'}^k\}$;

c) se $l_j(F_k) = 0$ e $j \notin \mathcal{Q}^{k-1}$, seja j' tal que l_j^k é a <u>k</u>-conjugada de $l_{j'}^k$; então, para $1 \leq m \leq u(k,j)$, $\gamma = \gamma_m^{(k,j)}$ sse existe γ', $\gamma' = \gamma_m^{(k-1,j')}$ e $\gamma = \gamma' \cup \{t$: existe $t' \in \gamma'$ e l_t^k é a k-conjugada de $l_{t'}^k\}$.

III) Se F_k é da forma $F' \wedge F''$, fazemos $\lambda_k = \emptyset$ e, para cada $j \in \mathcal{Q}^{k-1}$, se $l_j(F') = l_j(F'') = 1$, fazemos $l_j(F_k) = 1$, caso contrário, fazemos $l_j(F_k) = 0$.

<u>Addendum</u>: Associamos a $J(F_1, \ldots, F_k)$ a sua assinalação, assim construída:

1) Associamos λ_k a F_k e, para $1 \leq i < k$, fazemos $(\lambda_i)^k = (\lambda_i)^{k-1}$;

2) Tomamos $\mathcal{Q}^k = \mathcal{Q}^{k-1}$;

3) Para cada $j \in \mathcal{Q}^k$, fazemos $(\gamma)^{k,j} = (\gamma)^{k-1,j}$.

IV) Se F_k é da forma $F' \vee F''$, fazemos $\lambda_k = \emptyset$ e, para cada $j \in \mathcal{Q}^{k-1}$, se $l_j(F') = l_j(F'') = 0$, fazemos $l_j(F_k) = 0$, caso contrário, fazemos $l_j(F_k) = 1$.

<u>Addendum</u>: Associamos a $J(F_1, \ldots, F_k)$ a sua assinalação, assim construída:

1) Associamos λ_k a F_k e, para $1 \leq i < k$, fazemos $(\lambda_i)^k = (\lambda_i)^{k-1}$;

2) Tomamos $\mathcal{Q}^k = \mathcal{Q}^{k-1}$;

3) Para cada $j \in \mathcal{Q}^k$, fazemos $(\gamma)^{k,j} = (\gamma)^{k-1,j}$.

V) Se F_k é da forma $F' \rightarrow F''$, fazemos $\lambda_k = \{t \in \mathcal{Q}^{k-1} : l_t(F') = 1$ e $l_t(F'') = 0\}$ e

a) Primeiramente, para cada $j \in \lambda_k$, fazemos $l_j(F_k) = 0$;

b) Em seguida, para cada $j \in \mathcal{Q}^{k-1}$ tal que $\alpha_j^{k-1} \cap \lambda_k = \emptyset$, fazemos $l_j(F_k) =$

c) Em terceiro lugar, para cada $j \in \mathcal{Q}^{k-1}$, tal que $l_j(F_k)$ não foi obtida por a) nem por b) e existe $\gamma \in (\gamma)^{k-1,j}$ tal que para todo $t \in \gamma$, $l_t(F_k)$ se obtém por a) ou por c), fazemos $l_j(F_k) = 0$ (dizemos, nesse caso que l_j^k é k-diferenciada);

d) Finalmente, seja $R = \{t \in \mathcal{Q}^{k-1} : l_t(F_k)$ não foi obtido por a), b), nem c)\} e seja r o número de elementos de R; então aplicamos r vezes o seg procedimento: tomamos $j \in R$ tal que para todo $j' \in R$, $j' > j$, toma q' tal que $l_{q'}^{k-1}$ está construído mas $l_{q'+1}^{k-1}$ não está construído, e construí

ℓ_j^k e $\ell_{q'+1}^k$ tais que $\ell_j^{k-1} = \ell_{q'+1}^{k-1}$, $\ell_j(F_k) = 1$, $\ell_{q'+1}(F_k) = 0$. (Dizemos que $\ell_{q'+1}^k$ é k-diferenciada e que $\ell_{q'+1}^k$ é a k-conjugada de ℓ_j^k.)

<u>Addendum</u>: Associamos a $\mathfrak{T}(F_1, \ldots, F_k)$ a sua assinalação, assim construída

1) Associamos λ_k a F_k e, para $1 \leq i < k$, fazemos $(\lambda_i)^k = (\lambda_i)^{k-1} \cup \{t :$ existe t' ℓ_t^k é a k-conjugada de $\ell_{t'}^k \}$;

2) Se $\mathcal{R}$ tem r elementos, tomamos $\mathfrak{Q}^k = \{1, \ldots, q+r\}$;

3) Para cada $j \in \mathfrak{Q}^k$, construimos $(\gamma)^{k,j}$ tal que:

a) Se $\ell_j(F_k)$ foi obtida por a) ou por b), $(\gamma)^{k,j} = (\gamma)^{k-1,j}$;

b) Se $\ell_j(F_k)$ foi obtida por c), $u(k,j) = u(k-1,j) + 1$, $\gamma_{u(k,j)}^{(k,j)} = \alpha_j^k \cap \lambda_k$ e, para $1 \leq m < u(k,j)$, $\gamma = \gamma_m^{(k,j)}$ sse existe γ', $\gamma' = \gamma_m^{(k-1,j)}$ e $\gamma = \gamma' \cup \{t :$ existe $t' \in \gamma_m^{(k-1,j)}$ e ℓ_t^k é a k-conjugada de $\ell_{t'}^k \}$;

c) Se $\ell_j(F_k)$ foi obtida por d) e $\ell_j(F_k) = 1$, $u(k,j) = u(k-1,j)$ e, para $1 \leq m \leq u(k,j)$, $\gamma = \gamma_m^{(k,j)}$ sse existe γ', $\gamma' = \gamma_m^{(k-1,j)}$ e $\gamma = \gamma' - \{t : t \in \gamma'$ e $\ell_t(F_k) = 0\}$;

d) Se $\ell_j(F_k)$ foi obtida por d), $\ell_j(F_k) = 0$ e j' é tal que ℓ_j^k é a k-conjugada de $\ell_{j'}^k$, $u(k,j) = u(k-1,j') + 1$, $\gamma_{u(k,j)}^{(k,j)} = \alpha_j^k \cap \lambda_k$ e, para $1 \leq m < u(k,j)$, $\gamma = \gamma_m^{(k,j)}$ sse existe γ', $\gamma' = \gamma_m^{(k-1,j')}$ e $\gamma = \gamma' \cup \{t :$ existe t, $t \in \gamma'$ e ℓ_t^k é a k-conjugada de $\ell_{t'}^k \}$.

CONVENÇÃO: Numa tabela $\mathfrak{T}(F_1, \ldots, F_k)$, para todo $j \in \mathfrak{Q}^{k'}$, para $1 \leq k \leq k'$, se ℓ_j^k é k-diferenciada, dizemos que k é o <u>indicador</u> de $\gamma_{u(k,j)}^{(k',j)}$. Assim, para todo $j \in \mathfrak{Q}$ $\sigma^{k',j}$ é a sequência, possivelmente vazia, de indicadores dos elementos de $(\gamma)^{k',j}$

§ 9. PROPRIEDADES DAS TABELAS. Numa tabela, $\mathcal{T}(F_1, \dots, F_K)$, se $\mathcal{Q}^k = \{1, \dots q\}$,

PROPRIEDADE 1: Para todo $j \in \mathcal{Q}^k$, se $\gamma \bar{\in} (\gamma)^{k,j}$, $\gamma \subset \alpha^k_j$.

Prova: por indução em k.

a) $k = 1$. Então para todo γ, $\gamma \bar{\notin} (\gamma)^{k,j}$ e a proposição é vacuamente verdadeira.

b) $k > 1$. Suponhamos que, para $k' < k$, vale a proposição. Temos

1) Quando $(\gamma)^{k,j} = (\gamma)^{k-1,j}$ é fácil perceber que $\alpha^k_j = \alpha^{k-1}_j$ e assim, por hipótese indutiva, vale a proposição;

2) Quando $(\gamma)^{k,j}$ é tal que, para todo m, $1 \leq m \leq u(k,j)$, $\gamma = \gamma^{(k,j)}_m$ sse existe γ', $\gamma' = \gamma^{(k-1,j)}_m$ e $\gamma = \gamma' \cup \{t :$ existe t', l^k_t é a k-conjugada de $l^k_{t'}\}$, temos que $l_j(F_k) = 0$ e, assim, $\alpha^{k-1}_j \subset \alpha^k_j$. Ora, por hipótese indutiva, $\gamma' \subset \alpha^{k-1}_j$; logo $\gamma \subset \alpha^k_j$;

3) Quando $(\gamma)^{k,j}$ é tal que, para todo m, $1 \leq m \leq u(k,j)$, $\gamma = \gamma^{(k,j)}_m$ sse existe γ', $\gamma' = \gamma^{(k-1,j')}_m$, l^k_j é a k-conjugada de $l^k_{j'}$ e $\gamma = \gamma' \cup \{t :$ existe t', l^k_t é a k-conjugada de $l^k_{t'}\}$, temos que $l_j(F_k) = 0$ e o caso é análogo ao anterior;

4) Quando $(\gamma)^{k,j}$ é tal que, para todo m, $1 \leq m \leq u(k,j)$, $\gamma = \gamma^{(k,j)}_m$ sse existe γ', $\gamma' = \gamma^{(k-1,j)}_m$ e $\gamma = \gamma - \{t : t \in \gamma'$ e $l_t(F_k) = 0\}$, temos que se $t \in \gamma$, $l_t(F_k) = 1$; como $\alpha^k_j = \alpha^{k-1}_j - \{t : t \in \alpha^{k-1}_j$ e $l_t(F_k) = 0\}$ e, por hipótese indutiva $\gamma' \subset \alpha^{k-1}_j$, $\gamma \subset \alpha^k_j$.

5) Quando, finalmente l^k_j é k-diferenciada, para todo m, $1 \leq m < u(k,j)$, temos um caso análogo ao caso 2 ou ao caso 3; e $\gamma^{(k,j)}_{u(k,j)} = \alpha^k_j \cap \lambda_k$.

Logo, vale a proposição.

PROPRIEDADE 2: Para todo $j \in \mathcal{Q}^k$, $\emptyset \bar{\notin} (\gamma)^{k,j}$

Prova: por indução em k. Se $k = 1$, $(\gamma)^{k,j} = \emptyset$, logo $\emptyset \bar{\notin} (\gamma)^{k,j}$. Se $k > 1$, suponhamos que a proposição vale para $k-1$. Ora, quando $\gamma \bar{\in} (\gamma)^{k,j}$ sse existe $\gamma' \bar{\in} (\gamma)^{k,j'}$, $\gamma' \subset \gamma$ e $j' = j$ ou l^k_j é a k-conjugada de $l^k_{j'}$, a proposição segue da hipótese indutiva. Quando l^k_j é k-diferenciada, para $1 \leq m < u(k,j)$, temos um caso semelhante ao anterior e $\gamma^{(k,j)}_m \neq \emptyset$; por outro lado, $\gamma^{(k,j)}_{u(k,j)} = \alpha^k_j \cap \lambda_k$ e $\alpha^k_j \cap \lambda_k \neq \emptyset$, caso contrário, l^k_j não seria k-diferenciada e $l_j(F_k)$ teria sido obtida por R2V, item b. Finalmente, quando, para $1 \leq m \leq u(k,j)$, $\gamma = \gamma^{(k,j)}_m$ sse existe γ'

$\gamma' = \gamma_m^{(k-1,j)}$ e $\gamma = \gamma' - \{t : t \in \gamma'$ e $\ell_t(F_k) = 0\}$, $\gamma \neq \emptyset$, pois, nesse caso, $\ell_j(F_k)$ foi obtido por R2$\overline{V}$ ítem d) e, se para todo $t \in \gamma'$, $\ell_t(F_k) = 0$, para todo $t \in \gamma'$, $\ell_t(F_k)$ seria obtido por R2$\overline{V}$, ítens a) ou c); mas, nesse caso, $\ell_j(F_k)$ seria obtido por R2$\overline{V}$, ítem c); portanto, existe $t \in \gamma'$, $\ell_t(F_k) = 1$; assim, $\gamma \neq \emptyset$.

PROPRIEDADE 3: Para todo $j \in \vartheta^k$, se $\gamma \in (\gamma)^{k,j}$, para todo $t \in \gamma$, $u(k,t) < u(k,j)$.

Prova: Seja $j \in \vartheta^k$ e $\gamma \in (\gamma)^{k,j}$. Pela propriedade 2, $\gamma \neq \emptyset$. Seja t tal que $t \in \gamma$ e $u(k,t) = u'$. Tomemos $\sigma^{k,t}$, a sequência de indicadores dos elementos de $(\gamma)^{k,t}$; então para todo $i \in \sigma^{k,t}$, F_i é da forma $F' \to F''$, $\ell_t(F') = \ell_t(F'') = \ell_t(F_i) = 0$. Como, pela propriedade 1, $t \in \alpha_j^k$, $\ell_j(F') = \ell_j(F'') = \ell_j(F_i) = 0$. Assim, $\sigma^{k,t}$ é uma sub-sequência de $\sigma^{k,j}$. Por outro lado, seja i' o indicador de γ. Como $t \in \gamma$, $\ell_t^{i'}$ não é i'-diferenciada e $i' \notin \sigma^{k,t}$. Mas $i' \in \sigma^{k,j}$, logo, $\sigma^{k,t}$ é uma subsequência própria de $\sigma^{k,j}$ e, assim, $u(k,t) < u(k,j)$.

PROPRIEDADE 4: Para todo $j \in \vartheta^k$, $\gamma \in (\gamma)^{k,j}$ sse existe i, i é o indicador de γ e $\gamma = \alpha_j^k \cap (\lambda_i)^k$.

Prova: Trivial, por indução em $k - i$.

DEFINIÇÃO 1: Para todo $j \in \vartheta^k$, se $u(k,j) > 0$, para $1 \leq m \leq u(k,j)$, $t_m^{(k,j)} = j'$ se $j' \in \gamma_m^{(k,j)}$ e, para todo $j'' \in \gamma_m^{(k,j)}$, $j'' \geq j'$.

DEFINIÇÃO 2: Para todo $j \in \vartheta^k$, $\delta^{(k,j)}$ é a sequência tal que: 1) se $u(k,j) = 0$, $\delta^{(k,j)} = \emptyset$; 2) se $u(k,j) > 0$, $\delta^{(k,j)} = j'_1, \ldots, j'_{u(k,j)}$ e, para $1 \leq m \leq u(k,j)$, $j'_m = t_m^{(k,j)}$.

PROPRIEDADE 5: Para todo $j \in \vartheta^k$, se $t \in \delta^{(k,j)}$, $u(k,t) < u(k,j)$

Prova: segue imediatamente da propriedade 3 e das definições 1 e 2.

DEFINIÇÃO 3: Se $\Gamma = \Sigma_\Gamma$, g^Γ é uma função de $\mathcal{F}$ em $\mathbb{N}$ tal que, para todo F,

1) Se $F \in \Gamma$ ou F é atômica, $g^\Gamma(F) = 1$;

2) Se $F \notin \Gamma$ e F não é atômica, então: a) se $F = \neg F'$, $g^\Gamma(F) = g^\Gamma(F') + 1$; b) Se $F = F' \wedge F''$, $F = F' \vee F''$, ou $F = F' \to F''$, $g^\Gamma(F) = g^\Gamma(F') + g^\Gamma(F'') + 1$.

DEFINIÇÃO 4: Se $\Gamma = \{F_1, \ldots, F_k\}$ e $j \in \mathfrak{K}^k$, h_j é uma função de $\mathfrak{F}$ em $\{0, 1\}$ tal que, para todo F,

1) Se $g^\Gamma(F) = 1$, então, $h_j(F) = 0$ sse $F \in \{F_1, \ldots, F_k\}$ e $l_j(F) = 0$

2) Se $g^\Gamma(F) > 1$, então, $h_j(F) = 0$ sse;

a) $F = \neg\neg F'$ e $h_j(F') = 0$

b) $F = F' \wedge F''$ e $h_j(F') = 0$ ou $h_j(F'') = 0$

c) $F = F' \vee F''$ e $h_j(F') = h_j(F'') = 0$

d) $F = F' \to F''$, $h_j(F') = 1$ e $h_j(F'') = 0$

e) $F = F' \to F''$, $h_j(F') = h_j(F'') = 0$ e existe $t \in \delta^{(k,j)}$ tal que $h_t(F) = 0$.

LEMA 1: Para todo $j \in \mathfrak{K}^k$,

1) $h_j(\neg A) = 0 \Rightarrow h_j(A) = 1$

2) $h_j(\neg\neg A) = 1 \Rightarrow h_j(A) = 1$

3) $h_j(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow h_j(A) = h_j(B) = 1$

4) $h_j(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow h_j(A) = 1$ ou $h_j(B) = 1$

5) $h_j(A \to B) = 0 \Rightarrow h_j(B) = 0$

6) $h_j(A \to B) = 1 \Rightarrow h_j(A) = 0$ ou $h_j(B) = 1$

Provas: Todas elas se obtêm facilmente por indução em $g^\Gamma(F)$, para $\Gamma = \{F_1, \ldots, F_k\}$.

TEOREMA 1: Para todo $j \in \mathfrak{K}^k$, h_j é uma semi-validação.

Prova: Segue imediatamente do lema 1 e da definição de semi-validação.

LEMA 2: Para todo $j \in \mathfrak{K}^k$, se $\delta^{(k,j)} = \emptyset$, e $h_j(\vec{F}_n^{(1)}) = 0$, para todo m, $1 < m \leq n$, $h_j(F_m) = 1$ e $h_j(F_1) = 0$.

Prova: A proposição se prova facilmente por indução em n. Se n=1, a proposição é trivial. Seja $n > 1$ e suponhamos que se $h_j(\vec{F}_{n-1}^{(1)}) = 0$, para todo m, $1 < m \leq n-1$, $h_j(F_m) = 1$, $h_j(F_1) = 0$. Seja $h_j(\vec{F}_n^{(1)}) = 0$. Temos 2 casos;

a) $F \in \{F_1, \ldots, F_k\}$; então $l_j(F_k) = 0$. Como $\delta^{(k,j)} = \emptyset$, $(\gamma)^{k,j} = \emptyset$; assim, $l_j(F_n) = 1$, $l_j(\vec{F}_{n-1}^{(1)}) = 0$; mas então $h_j(F_n) = 1$, $h_j(\vec{F}_{n-1}^{(1)}) = 0$; portanto, em vista da hipótese indutiva e do último resultado, para todo m, $1 < m \leq n$, $h_j(F_m) = 1$, $h_j(F_1) = 0$

b) $F \notin \{F_1, \ldots, F_k\}$; então, uma vez que a condição 2e) não pode ser satisfeita,

$h_j(F_n)=1$, $h_j(\vec{F}^{(1)}_{n-1})=0$; logo, levando em conta a hipótese indutiva, para todo m, $1 < m \leq n$, $h_j(F_m)=1$, $h_j(F_1)=0$.

DEFINIÇÃO 5: Para todo $j \in \mathfrak{d}^k$, todo $t \in \mathfrak{d}^k$, $p \geq 1$, $t \overset{p}{*} j \underset{def}{=}$ existem $t_1, \ldots, t_p$, $t_1 = t$, $t_p = j$ e, para todo p', $1 < p' \leq p$, $p'-1 \,\bar{\in}\, \delta^{(k,p')}$.

PROPRIEDADE: Para todo $j \in \mathfrak{d}^k$, $j \overset{1}{*} j$.

LEMA 3: Para todo $j \in \mathfrak{d}^k$, se $h_j(F' \to F'')=0$, existe $t \in \mathfrak{d}^k$, existe $p \geq 1$, $t \overset{p}{*} j$ e $h_t(F')=1$, $h_t(F'')=0$

Prova: Seja $h_j(F' \to F'')=0$. Temos 2 casos:

1) $F' \to F'' \in \{F_1, \ldots, F_k\}$. Então $l_j(F' \to F'')=0$ e $l_j(F'')=0$. Se $l_j(F')=1$, $h_j(F')=1$ e como $j \overset{1}{*} j$, a proposição se verifica para o caso; se $l_j(F')=0$, seja i, $1 < i \leq k$, tal que $F' \to F'' = F_i$. Então l_j^i é i-diferenciada; assim, existe $\gamma \,\bar{\in}\, (\gamma)^{(k,j)}$, i é o indicador de γ. Assim, para todo $t' \in \gamma$, $l_{t'}(F')=1$, $l_{t'}(F'')=0$. Logo, existe $t \,\bar{\in}\, \delta^{(k,j)}$, $l_t(F')=1$, $l_t(F'')=1$. Assim, a proposição vale, no caso, para $p=2$.

2) $F' \to F'' \notin \{F_1, \ldots, F_k\}$. Apliquemos indução em $u(k,j)$.

a) $u(k,j)=0$. Então, $\delta^{(k,j)}=\emptyset$ e segue do lema 2 que $h_j(F')=1$, $h_j(F'')=0$. Assim a proposição é verdadeira para $t=j$ e $p=1$

b) $u(k,j)>0$. Se $h_j(F')=1$, como $h_j(F'')=0$, tal como no caso anterior, a proposição é verdadeira para $t=j$ e $p=1$. Se $h_j(F')=0$, pela definição 4, existe $j' \,\bar{\in}\, \delta^{(k,j)}$, $h_{j'}(F' \to F'')=0$. Ora, pela propriedade 4, $u(k,j') < u(k,j)$. Logo, por hipótese indutiva, existe $I \in \mathfrak{d}^k$, existe $p \geq 1$, $t \overset{p}{*} j'$ e $h_t(F')=1$, $h_t(F'')=0$. Sejam t', p', tais que $t' \overset{p'}{*} j'$, $h_{t'}(F')=1$, $h_{t'}(F'')=0$. Como $j' \in \delta^{(k,j)}$, $t' \overset{p'+1}{*} j$. Assim existe $t \in \mathfrak{d}^k$ (a saber, t'), existe p (a saber, $p'+1$) $t \overset{p}{*} j$, $h_t(F')=1$, $h_t(F'')=0$.

COROLÁRIO: Para todo $j \in \mathfrak{d}^k$, todo F da forma $\vec{F}^{(1)}_2$, se $h_j(F)=0$, existe t, existe $p \geq 1$, $t \overset{p}{*} j$ e $h_t(F_2)=1$, $h_t(F_1)=0$.

LEMA 4: Para todo $j \in \mathcal{Q}^k$, se $t \bar{\in} \delta^{(k,j)}$ e $h_t(F)=0$ então $h_j(F)=0$

Prova: seja $\Gamma = \{F_1, \ldots, F_k\}$ e apliquemos indução em $g^\Gamma(F)$.

1) Se $g^\Gamma(F)=1$, e $h_t(F)=0$, $\ell_t(F)=0$. Como $t \bar{\in} \delta^{(k,j)}$, existe $\gamma \bar{\in} (\gamma)^{k,j}$ tal que $t \in \gamma$. Então, pela propriedade 1, $t \in \alpha^k_j$. Logo, $h_j(F)=0$.

2) Se $g^\Gamma(F)>1$ e $h_t(F)=0$, temos 4 casos:

a) $F = \neg\neg F'$ e $h_t(F')=0$. Como $g^\Gamma(F') < g^\Gamma(F)$, por hipótese indutiva, $h_j(F')=0$; logo, $h_j(F)=0$;

b) $F = F' \wedge F''$ e $h_t(F')=0$ ou $h_t(F'')=0$. Como $g^\Gamma(F') < g^\Gamma(F)$ e $g^\Gamma(F'') < g^\Gamma(F)$, $h_j(F')=0$ ou $h_j(F'')=0$; logo, $h_j(F)=0$;

c) $F = F' \vee F''$ e $h_t(F') = h_t(F'')=0$. Como no caso anterior, $h_j(F')=h_j(F'')=0$. Logo $h_j(F)=0$;

d) $F = F' \to F''$; aqui, temos diretamente que $h_j(F' \to F)=0$.

COROLÁRIO: Para todo $j \in \mathcal{Q}^k$, todo $t \in \mathcal{Q}^k$, todo $p \geq 1$, se $t \overset{p}{\times} j$ e $h_t(F)=0$, então $h_j(F)=0$.

Prova: por indução em p. Se $p=1$, a proposição é trivial. Se $p>1$, seja t tal que $t \overset{p}{\times} j$ e F tal que $h_t(F)=0$. Então existe t', $t \in \delta^{(k,t')}$ e $t' \overset{p-1}{\times} j$. Ora, pelo lema 4, $h_{t'}(F)=0$. Mas então, por hipótese indutiva, $h_j(F)=0$.

LEMA 5: Para todo $j \in \mathcal{Q}^k$, todo $n \geq 1$, se F é da forma $\vec{F}_n^{(1)}$ e $h_j(F)=0$, então, existe $t \in \mathcal{Q}^k$, existe $p \geq 1$, $t \overset{p}{\times} j$ e, para todo m, $1 < m \leq n$, $h_t(F_m)=1$, $h_t(F_1)=0$.

Prova: Por indução em n, $n \geq 2$. Seja F da forma $\vec{F}_n^{(1)}$.

1) se $n=1$, a proposição é trivial.

2) se $n>1$, F da forma $F_n \to \vec{F}_{n-1}^{(1)}$. Se $h_j(F)=0$, pelo lema 3, existe $t' \in \mathcal{Q}^k$, existe $p' \geq 1$, $t' \overset{p'}{\times} j$ e $h_{t'}(F_n)=1$, $h_{t'}(F_{n-1})=0$. Por hipótese indutiva, existe $t'' \in \mathcal{Q}^k$, existe $p'' \geq 1$, $t'' \overset{p''}{\times} t'$ e, para todo m, $1 < m \leq n-1$, $h_{t''}(F_m)=1$, $h_{t''}(F_1)=0$. Mas, pelo corolário do lema 4, $h_{t''}(F_n)=1$. Por outro lado, como $t'' \overset{p''}{\times} t'$ e $t' \overset{p'}{\times} j$, $t' \overset{p'+p''-1}{\times} j$. Assim, existe $t \in \mathcal{Q}^k$ (a saber, t''), existe $p \geq 1$, (a saber $p'+p''-1$), para todo m, $1 < m \leq n$, $h_t(F_m)=1$, $h_t(F_1)=0$.

COROLÁRIO: Para todo $j \in \mathcal{Q}^k$, todo $n \geq 1$, se F é da forma $\vec{F}_n^{(1)}$ e $h_j(F)=0$, existe uma semi-validação s, tal que, para todo m, $1 < m \leq n$, $s(F_m)=1$, $s(F_1)=0$ e, para todo F', se $h_j(F')=1$, $s(F')=1$.

Prova: segue imediatamente dos lemas 3 e 5, juntamente com o teorema 1.

TEOREMA 2: Para todo $j \in \mathcal{L}^k$, h_j é uma validação.

Prova: O teorema segue imediatamente do Teorema 1 e do lema 5

DEFINIÇÃO 6: Se v é uma validação, $v[F_1, \ldots, F_k]$ é a k-tupla ordenada, $w_1, \ldots, w_k$, tal que, para $1 \leq i \leq k$, $w_i = v(F_i)$.

DEFINIÇÃO 7: Se v é uma validação, $\Pi(v, \Gamma) = \{H' \to H'' \in \Gamma : v$ é diferenciada em $H' \to H''\}$.

TEOREMA 3: Se v é uma validação, existe $j \in \mathcal{L}^k$ tal que $v[F_1, \ldots, F_k] = \ell_j^k$.

Prova: por indução em k.

1) Se $k=1$ e v é uma validação, $v[F_1]=1$ ou $v[F_1]=0$; ora $\mathcal{L}^1 = \{1,2\}$, $\ell_1^1 = 1$, $\ell_2^1 = 0$. Logo, vale a proposição.

2) Se $k>1$, suponhamos que para toda validação v, existe $j \in \mathcal{L}^{k-1}$ tal que $v[F_1, \ldots, F_{k-1}] = \ell_j^{k-1}$. Temos 5 casos:

a) F_k é atômica. Seja $j \in \mathcal{L}^{k-1}$ tal que $v[F_1, \ldots, F_{k-1}] = \ell_j^{k-1}$. Como $j \in \mathcal{L}^{k-1}$, por R2 I, $\ell_j(F_k)=1$ e existe $j' \in \mathcal{L}^k$, $\ell_{j'}$ é a k-conjugada de ℓ_j. Logo, $\ell_{j'}^{k-1} = \ell_j^{k-1}$ e $\ell_{j'}(F_k)=0$. Assim, se $v(F_k)=1$, $v[F_1, \ldots, F_k] = \ell_j^k$ e, se $v(F_k)=0$, $v[F_1, \ldots, F_k] = \ell_{j'}^k$. Como $j \in \mathcal{L}^k$, $j' \in \mathcal{L}^k$, vale a proposição.

b) F_k é da forma $\neg F'$. Seja $j \in \mathcal{L}^{k-1}$ tal que $v[F_1, \ldots, F_{k-1}] = \ell_j^{k-1}$.

A) Seja $v(F')=0$. Então $v(F_k)=1$ e $\ell_j(F')=0$, $\ell_j(F_k)=1$ (por R2 II, item b)); logo, $v[F_1, \ldots F_k] = \ell_j^k$. Como $j \in \mathcal{L}^k$, vale a proposição.

B) Seja $v(F')=1$. Temos 2 subcasos:

I) F_k é da forma $\neg\neg F''$ e $v(F'')=0$; então $v(F_k)=0$, $\ell_j(F'')=0$ e $\ell_j(F_k)=0$ (por R2 II, item a)); logo $v[F_1, \ldots, F_k] = \ell_j^k$. Como $j \in \mathcal{L}^k$, vale a proposição.

II) F_k não é da forma $\neg\neg F''$ ou $v(F'')=1$. Então $\ell_j(F_k)=1$ e existe $j' \in \mathcal{L}^k$ $\ell_{j'}^k$ é a k-conjugada de ℓ_j^k. Então $\ell_j^{k-1} = \ell_{j'}^{k-1}$ e $\ell_{j'}(F_k)=0$ (por R2 II, item c)). Logo, se $v(F_k)=1$, $v[F_1, \ldots, F_k] = \ell_j^k$ e se $v(F_k)=0$, $v[F_1, \ldots, F_k] = \ell_{j'}^k$. Como $j \in \mathcal{L}^k$, $j' \in \mathcal{L}^k$, vale a proposição.

c) F_k é da forma $F' \wedge F''$. Seja $j \in \mathcal{L}^{k-1}$ tal que $v[F_1, \ldots, F_{k-1}] = \ell_j^{k-1}$. Se $v(F_k)=1$, $v(F')=v(F'')=1$ e $\ell_j(F')=\ell_j(F'')=1$. Logo, por R2 III, $\ell_j(F_k)=1$ e, assim, $v[F_1, \ldots, F_k] = \ell_j^k$. Se $v(F_k)=0$, $v(F')=0$ ou $v(F'')=0$, $\ell_j(F')=0$ ou $\ell_j(F'')=0$. Logo, por R2 III, $\ell_j(F_k)=0$; assim, $v[F_1, \ldots F_k] = \ell_j^k$. Como $j \in \mathcal{L}^k$, vale a proposição.

d) F_k é da forma $F' \vee F''$. Seja $j \in \mathcal{L}^{k-1}$ tal que $v[F_1, \ldots, F_{k-1}] = \ell_j^{k-1}$. Se $v(F_k) = 1$, $v(F') = 1$ ou $v(F'') = 1$ e $\ell_j(F') = 1$ ou $\ell_j(F'') = 1$. Logo, por R2 $\overline{IV}$, $\ell_j(F_k) = 1$ e, assim, $v[F_1, \ldots, F_k] = \ell_j^k$. Se $v(F_k) = 0$, $v(F') = v(F'') = 0$ e $\ell_j(F') = \ell_j(F'') = 0$. Logo, por R2 $\overline{IV}$, $\ell_j(F_k) = 0$ e, assim, $v[F_1, \ldots, F_k] = \ell_j^k$. Como $j \in \mathcal{L}^k$, vale a proposição.

e) F_k é da forma $F' \to F''$. Seja $j \in \mathcal{L}^{k-1}$ tal que $v[F_1, \ldots, F_{k-1}] = \ell_j^{k-1}$.

A) Seja $v(F'') = 1$. Então, $v(F_k) = 1$, $\ell_j(F'') = 1$ e $\ell_j(F_k) = 1$ (por R2 $\overline{V}$, item b). Logo, $v[F_1, \ldots, F_k] = \ell_j^k$. Como $j \in \mathcal{L}^k$, vale a proposição.

B) Seja $v(F'') = 0$ e $v(F') = 1$. Então $v(F_k) = 0$, $\ell_j(F'') = 0$, $\ell_j(F') = 1$ e $\ell_j(F_k) = 0$ (por R2 $\overline{V}$, item a)). Logo, $v[F_1, \ldots, F_k] = \ell_j^k$. Como $j \in \mathcal{L}^k$, vale a proposição.

C) Seja $v(F'') = v(F') = 0$. Seja $\Gamma = \{G \in \{F_1, \ldots, F_{k-1}\} : v(G) = 1\}$. Temos 2 subcasos:

I) $\Gamma \vdash F' \to F''$; então $\Gamma \models F' \to F''$; logo, $v(F' \to F'') = 1$. Como $\ell_j^{k-1} = v[F_1, \ldots, F_{k-1}]$, para todo $G \in \Gamma$, $\ell_j(G) = 1$. Portanto, para todo $t \in \mathcal{L}_j^k$, todo $G \in \Gamma$, $\ell_t(G) = 1$. Ora, se $\mathcal{L}_j^k \cap \Lambda_k \neq \emptyset$, existe t, para todo $G \in \Gamma$, $\ell_t(G) = 1$ e $\ell_t(F' \to F'')$ é obtida por R2 $\overline{V}$, item a), c) ou d). Então, em qualquer desses casos, existe $t' \in \mathcal{L}^k$, $\ell_{t'}^{k-1} = \ell_t^{k-1}$ e $\ell_{t'}(F' \to F) = 0$. Mas, pelo teorema 2, $h_{t'}$ é uma validação e como para todo $G \in \Gamma$, $h_{t'}(G) = 1$, temos que $\Gamma \not\models F' \to F''$, o que contraria a hipótese. Logo, $\mathcal{L}_j^k \cap \Lambda_k = \emptyset$ e, por R2 $\overline{V}$ item b, $\ell_j(F' \to F) = v(F' \to F) = 1$ e $v[F_1, \ldots, F_k] = \ell_j^k$. Como $j \in \mathcal{L}^k$, vale a proposição.

II) $\Gamma \nvdash F' \to F''$; então $\Gamma \not\models F' \to F''$ e existe v', $v' \models \Gamma$, $v'(F') = 1$, $v'(F'') = 0$. Seja $t \in \mathcal{L}^{k-1}$ tal que $v'[F_1, \ldots, F_{k-1}] = \ell_t^{k-1}$. Então, para todo $G \in \Gamma$, $\ell_t(G) = 1$. Logo $t \in \mathcal{L}_j^{k-1}$. Como $\ell_t(F') = 1$, $\ell_t(F'') = 0$, $t \in \Lambda_k$. Assim, $t \in \mathcal{L}_j^{k-1} \cap \Lambda_k$. Logo, $\ell_j(F_k)$ não pode ser obtido por R2 $\overline{V}$, item b. Temos então 2 casos:

I) $v(F_k) = 0$. Como $\ell_j(F_k)$ é obtido por R2 $\overline{V}$, item a), c) ou d), em qualquer desses casos existe $j' \in \mathcal{L}^k$, $\ell_{j'}^{k-1} = \ell_j^{k-1}$ e $\ell_j(F_k) = 0$. Logo, a proposição se verifica.

II) $v(F_k) = 1$. Mostremos que nesse caso, $\ell_j(F_k)$ não pode ser obtida por R2 $\overline{V}$, itens a) ou c); para tanto apliquemos indução no número de elementos de $\Pi(v, \{F_1, \ldots, F_k\})$. Seja pois $n \geq 0$, o número de elementos de $\Pi(v, \{F_1, \ldots, F_k\})$.

$n = 0$. Então, $v(F_k)$ não pode ser obtida por a) pois $\ell_j(F') = 0$, nem por c) pois, como $n=0$, $u(k-1,j)=0$.

$n>0$. Segue da propriedade 4, § 6, que para todo $H' \to H'' \in \Pi(v, \{F_1,\dots,F_k\})$ existe v', $v'(F_k)=1$, $v' \models \Gamma \cup \{H'\}$ e $v'(H'')=0$. Sejam $H'_1 \to H''_1, \dots, H'_n \to H''_n$, os elementos de $\Pi(v, \{F_1,\dots,F_k\})$ e sejam $\{v^1\}, \dots, \{v^n\}$ conjuntos de validações tais que, para $1 \leq m \leq n$, $\{v^m\}$ é o conjunto de todas as validações v' tais que $v'(F_k)=1$, $v' \models \Gamma \cup H'_m$ e $v'(H''_m)=0$. Sejam $\beta_1,\dots,\beta_n$ tais que para todo m, $1 \leq n \leq m$, $t \in \beta_m$ sse $v' \in \{v^m\}$ e $v'[F_1,\dots,F_{k-1}] = l_t^{k-1}$. Ora, obviamente para todo v', todo m, $1 \leq m \leq n$, se $v' \in \{v^m\}$, e n' é o número de elementos de $\Pi(v', \{F_1,\dots,F_k\})$, $n' < n$ (pois, por um lado, para toda fórmula $A' \to A'' \in \{F_1,\dots,F_k\}$ tal que se v não é diferenciada em $A' \to A''$, $A' \in \Gamma$ ou $A' \to A'' \in \Gamma$ e, assim, $v'(A')=1$ ou $v'(A' \to A'')=1$, não sendo o caso, então, que v' é diferenciada em $A' \to A''$; por outro lado, v é diferenciada em $H'_m \to H''_m$ e v' não é diferenciada em $H'_m \to H''_m$). Seja $t' \in \mathcal{V}^{k-1}$ tal que $v'[F_1,\dots F_{k-1}] = l_{j'}^{k-1}$. Como $v'(F_k)=1$, por hipótese indutiva, $l_{t'}(F_k)$ não é obtida por $R2\underline{V}$, item a) ou c). Assim, para todo t, todo m, se $t \in \beta_m$, $l_j(F_k)$ não é obtida por $R2V$, item a) ou c). Mas, para todo m, todo $t \in \beta_m$, todo $G \in \Gamma$, $l_t(G)=1$, portanto, $t \in \mathcal{L}_j^{k-1}$; por outro lado, sejam $i_1,\dots,i_n$, tais que para $1 \leq m \leq n$, $i_m \in \{1,\dots,k-1\}$ e $H'_m \to H''_m = F_{i_m}$; então, se $t \in \beta_m$, $t \in (h_{i_m})^{k-1}$; assim, $\beta_m \subset \mathcal{L}_j^{k-1} \cap (h_{i_m})^{k-1}$. Ora, obviamente $u(k-1,j)=n$. Assim, $(\gamma)^{k-1,j} = \gamma_1^{(k-1,j)}, \dots, \gamma_n^{(k-1,j)}$ e, pela propriedade 4, para $1 \leq m \leq n$ $\gamma_m^{(k-1,j)} = \mathcal{L}_j^{k-1} \cap (h_{i_m})^{k-1}$; logo, para $1 \leq m \leq n$, $\beta_m \subset \gamma_m^{(k-1,j)}$. Portanto, $l_j(F_k)$ não pode ser obtida por $R2\overline{V}$, item c). Ora, obviamente, $l_j(F_k)$ não pode ser obtida por $R2\overline{V}$, item a), pois $l_j(F')=0$. Fica pois demonstrada a propriedade enunciada. Mas então $l_j(F_k)$ é obtida por $R2\hat{V}$, item d) e, assim, $l_j(F_k)=1$. Logo, $v[F_1,\dots,F_k] = l_j^k$. Como $j \in \mathcal{V}^k$ e todos os casos foram examinados, fica demonstrado o teorema.

§ 10. UM MÉTODO DE DECISÃO PARA C_ω.

M. Fidel provou, por métodos algébricos, que o cálculo C_ω é decidível. Apresentaremos aqui um método de decisão para C_ω, baseado nas tabelas introduzidas no § 8.

TEOREMA: Seja F uma fórmula qualquer, $F_1, \ldots, F_k$ uma Σ-sequência tal que $\{F_1, \ldots, F_k\} = \Sigma_F$. Seja $\mathfrak{L}^k$ o conjunto dos índices das linhas de $\mathfrak{T}(F_1, \ldots, F_k)$. Então, $\vdash F$ sse para todo $j \in \mathfrak{L}^k$, $l_j(F_k) = 1$.

Prova: Suponhamos que $F_1, \ldots, F_k$ é uma Σ-sequência; $\{F_1, \ldots, F_k\} = \Sigma_F$ e $\mathfrak{L}^k$ é o conjunto dos índices de $\mathfrak{T}(F_1, \ldots, F_k)$. Então, obviamente, $F = F_k$.

a) Suponhamos que $\vdash F$. Então $\vdash F_k$ e, pelo teorema da correção, § 4, $\vDash F_k$. Assim, para toda validação v, $v(F_k) = 1$. Ora, se existe $j \in \mathfrak{L}^k$ tal que $l_j(F_k) = 0$, pelo teorema 2, § 9, existe v, $v(F_k) = 0$. Logo, para todo $j \in \mathfrak{L}^k$, $l_j(F_k) = 1$.

b) Suponhamos que $\nvdash F$. Então $\nvdash F_k$ e, pelo corolário da completude fraca, § 5, $\nvDash F_k$. Logo, existe uma validação v, tal que, $v(F_k) = 0$. Seja v' tal que $v'(F_k) = 0$. Ora, pelo teorema 3, § 9, para toda validação v, existe $j \in \mathfrak{L}^k$ tal que $v[F_1, \ldots, F_k] = l_j^k$. Seja $j' \in \mathfrak{L}^k$ tal que $v'[F_1, \ldots, F_k] = l_{j'}^k$. Então $l_{j'}(F_k) = 0$. Logo, existe $j \in \mathfrak{L}^k$, $l_j(F_k) = 0$.

Assim, por meio das tabelas definidas no § 8, o cálculo C_ω é decidível.

§ 11 - CONCLUSÃO.

Os resultados aqui obtidos para o cálculo Cω podem ser facilmente adaptado para outros cálculos. Se, por exemplo restringirmos a definição de validação às condições 5 e 6 e a regra R2, do § 8, aos casos I e V, temos uma semântica e um método de decisão para o cálculo proposicional implicativo intuicionista. Se ficarmos com as condições 3, 4, 5, 6 da definição de semi-validação e com os casos I, III, IV e V da regra R2, temos uma semântica e um método de decisão para o cálculo proposicional positivo intuicionista. Por outro lado, adaptando convenientemente as condições relativas à negação, na definição de semi-validação e em R2, obtemos uma semântica e um método de decisão para o cálculo proposicional intuicionista.

REFERÊNCIAS: