Andréa Maria Altino de Campos Loparić

# DEFINIÇÃO DE CONJUNTOS DECIDÍVEIS DE VALORAÇÕES
# PELA FATORIZAÇÃO DA LINGUAGEM

Tese apresentada como requisito parcial
para obtenção do título de
*Doutor em Lógica e Filosofia da Ciência*
na área de Lógica e Epistemologia
Universidade Estadual de Campinas

ORIENTADOR: Prof. Dr. Balthazar Barbosa Filho

Campinas
1988

A quem possa interessar

Quando quis agradecer
nomeando cada um, e a função que teve,
vi serem tantas as equações e metafrases
a compor e imprimir nesses papéis,
que precisei entender.
Ninguém escreve melhor do que fala,
não tenho um tempo que conte,
nem há dinheiro que pague.
Faço aqui só um sinal,
lembrança de quem chamei *papai*,
dando mais esse trabalho a quem tem de decifrar,
para continuar.

S U M Á R I O

## 1. Convenções preliminares.

Ao longo deste trabalho, se X é um conjunto finito ou enumerável, $\ell(X)$ é uma notação para o número de elementos de X (o cardinal de X); $\omega$ é o ordinal da série dos números naturais e $n^+$ denota o sucessor de n, para $n \in \omega$. Um conjunto de índices é entendido como um ordinal finito ou enumerável ou como um subconjunto recursivo de um ordinal finito ou enumerável. A variável sintática I é reservada para os conjuntos de índices positivos, i.e., para subconjuntos de $\omega - \{0\}$ tais que, se $n > 0$ e $n^+ \in I$, então $n \in I$. Para todo conjunto de índices positivos I e para quaisquer $k, m$ tais que $\{k,m\} \subset I$, se $J = \{j \in I : k \leq j \leq m\}$, então J é dito o *segmento* de I entre k e m (ou, de k até m) e é denotado por $I[k,m]$. Uma *seqüência* $\rho$ é uma bijeção de um conjunto I em um conjunto X; I se diz, então, o conjunto dos *índices* de $\rho$ e é denotado, também, por $I(\rho)$; por abuso de linguagem, usaremos $\ell(\rho)$ no sentido de $\ell(I(\rho))$; X se diz a *imagem* de I por $\rho$ e é denotado por $Rg(\rho)$. Se $x \in Rg(\rho)$, diz-se que x é um *termo* de $\rho$; se $i \in I(\rho)$, então $\rho_i$ é o termo de $\rho$, cujo índice é i. $\rho^*$ é uma *subseqüência* de $\rho$ se existe uma função injetora $f$, de $I(\rho^*)$ em $I(\rho)$ tal que, se $i \in I(\rho^*)$, $\rho^*_i = \rho_{f(i)}$ e $i' < i$, então $f(i') < f(i)$. Se $I[k,m]$ é um segmento de $I(\rho)$ e $\rho[k,m]$ é a subseqüência de $\rho$ formada pelos termos de $\rho$, cujos índices estão em $I[k,m]$, dizemos que $\rho[k,m]$ é o *segmento, de* k *até* m, *de* $\rho$; quando $k=1$, usamos, também, a notação $\rho[m]$ e dizemos que $\rho[m]$ é o *segmento inicial* até m de $\rho$ e $I[m]$ denota o índice desse segmento, i. e., o conjunto $\{1,2,\ldots,m\}$. Uma *enumeração* de X é uma seqüência cuja imagem é X. Se $Y \subset X$ e $f$ é uma função definida em X, então $f[Y]$ é a função $f'$, definida em $Y$, tal que, para todo $y \in Y$, $f'(y) = f(y)$. Uma *família* é um conjunto eventualmente indexado. A notação do tipo $\{X_i\}$, $i \in J$, indica uma família de elementos do tipo X, indexada por J; a notação $\{X_i\}$, $i \leq n$, abrevia $\{X_i\}$, $i \in \{0,1,\ldots,n\}$.

Alguns conceitos conjuntistas e da teoria dos números são, como de hábito, pressupostos. Em particular, empregamos no sentido usual os termos básicos da teoria das funções recursivas.

## 2. Linguagens proposicionais.

Um *vocabulário* é um conjunto decidível de símbolos e uma *expressão* é uma seqüência finita, cujos termos pertencem a um vocabulário. Uma *linguagem* é um par formado por um vocabulário e um subconjunto das expressões desse vocabulário, dito *conjunto das expressões da linguagem*. Uma *ordem alfabética* é uma função cujo domínio é um conjunto de índices (não necessariamente do tipo I) e cuja imagem é um vocabulário. $\pi$ é a seqüência, indexada por $\omega$, cuja imagem é o conjunto dos naturais primos e tal que $\pi_i < \pi_j$ se $i < j$. Se I é o índice de uma seqüência $\sigma$ e $i \in I(\sigma)$, então dizemos que $\pi_i$ é uma *ocorrência* em $\sigma$, que é a i-ésima ocorrência em $\sigma$ e que é uma ocorrência de $\sigma_i$; se existe $i \in I(\sigma)$, tal que $\pi_i$ é uma ocorrência de $\zeta$ em $\sigma$, então $\sigma'$ é a *seqüência das ocorrências de* $\zeta$ *em* $\sigma$ se e só se $\sigma'$ é a maior subseqüência de $\sigma$ tal que, para todo $i \in I(\sigma')$, $\sigma'_i = \zeta$. $\pi_i$ é a $j^+$-ésima ocorrência de $\zeta$ em $\sigma$ se $\pi_i$ é uma ocorrência de $\zeta$ em $\sigma$ e existem exatamente j ocorrências de $\zeta$ em $\sigma$ menores que $\pi_i$.

Seja $\xi = \{2^n\}, n \in \omega$. Convencionemos denotar por $\bar{n}$ o natural $2^n$. Diremos, ainda, que $\bar{n}$ é o *numeral* de n. Assim, o numeral de n é um nome de $2^n$. $\mu$ é dito um *conjunto de valores de verdade*, se $\mu$ é um subconjunto finito de $\xi$ tal que, para todo $n \in \omega$, se $\overline{n^+} \in \mu$, então $\bar{n} \in \mu$.

$\mathcal{L}$ é uma *linguagem proposicional* se, para algum $n \in \omega$, o vocabulário de $\mathcal{L}$ se reparte em $n+2$ conjuntos, $\kappa^{\circ}_{\mathcal{L}}, \dots, \kappa^{n^+}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, tais que: para $m \leqslant n^+$, $\kappa^{m}_{\mathcal{L}}$ é um conjunto finito de símbolos, ditos *conectivos* $m$-*ários* de $\mathcal{L}$; se $\kappa^{\circ}_{\mathcal{L}} \neq \phi$, então $\kappa^{\circ}_{\mathcal{L}}$ é um conjunto de valores de verdade; $\kappa^{n^+}_{\mathcal{L}}$ é não-vazio; e $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ é um conjunto enumerável (infinito) de símbolos, ditos *variáveis proposicionais* de $\mathcal{L}$. As expressões de $\mathcal{L}$ — ditas *fórmulas* de $\mathcal{L}$ — formam um conjunto, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, indutivamente definido como se segue: para toda $\rho$ que é uma expressão do vocabulário de $\mathcal{L}$, $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ se e só se $\ell(\rho) \in \omega$ e existem $j_0, j_1, \dots, j_m \in \Gamma(\rho)$ tais que $j_0 = 1$, $j_m = \ell(\rho)$ e: a) $m = 0$, e $\rho[j_0] \in \kappa^{\circ}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$; ou b) $m > 0$, para $n < m$, $j_n < j_{n^+}$, $\rho[j_0] \in \kappa^{m}_{\mathcal{L}}$ e $\rho[j^+_n, j_{n^+}] \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$. Dizemos que $\rho$ é *atômica* se $\ell(\rho) = 1$; se $\rho$ é atômica e $\rho_{\mathcal{L}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, então $\rho$ é uma *variável* de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ e se $\rho_1 \in \kappa^{\circ}_{\mathcal{L}}$, $\rho$ é uma *constante* de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$.

Vamos supor que $\omega$ é o índice da ordem alfabética de $\mathcal{L}$; que, se $i$, $j$ e $k$ são índices de elementos de $\kappa^{m}_{\mathcal{L}}$, $\kappa^{n}_{\mathcal{L}}$ e $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, respectivamente, então, $i \leqslant j < k$ e, se $m < n$, então $i < j$; e que, se $\overline{n}$ e $\overline{m}$ são elementos de $\kappa^{\circ}_{\mathcal{L}}$ e $n < m$, então o índice de $\overline{n}$ é menor do que o de $\overline{m}$.

Seja $\eta$ a função que associa a cada termo da ordem alfabética de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ o seu índice; então, se $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, o *número de Gödel* de $\rho$ é o produto:

$$\pi_1^{\eta(\rho_1)} \times \pi_2^{\eta(\rho_2)} \times \dots \times \pi_{\ell(\rho)}^{\eta(\rho_{\ell(\rho)})} .$$

A *enumeração canônica* de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ é aquela induzida pelos números de Gödel das fórmulas de $\mathcal{L}$.

## 3. Relações sintáticas, relações de ascendência.

Se o campo de uma relação é o conjunto dos números naturais, dizemos que ele é uma *relação numérica* ou que se trata de uma relação que vige entre números naturais. Se, no entanto, nosso assunto é uma relação vigente entre expressões de uma linguagem, dizemos que se trata de uma *relação sintática*. No contexto das linguagens proposicionais, aqui estudadas, as relações sintáticas consideradas serão os conjuntos de n-uplas de fórmulas dessas linguagens. Assim, para toda linguagem proposicional $\mathcal{L}$, uma relação sintática para $\mathcal{L}$ é um subconjunto de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^{n}$, para algum $n \in \omega$, e uma função sintática de $\mathcal{L}$ é uma função cujos argumentos e valores são elementos de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$. Como, para toda $\mathcal{L}$ que é uma linguagem proposicional, o conjunto $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ é enumerável, por meio da enumeração canônica de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, podemos traduzir para o domínio das fórmulas de $\mathcal{L}$ todos os conceitos definidos para o domínio dos números naturais, em particular, os conceitos de ordem e os conceitos da teoria das funções recursivas.

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem proposicional.

Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma *relação de ascendência* para $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ se $\mathcal{R}$ é uma ordem parcial reflexiva e recursiva para $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ tal que, para todo $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, o conjunto $\{B \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}} : B \mathcal{R} A\}$ é finito.

Dada uma relação de ascendência $\mathcal{R}$, para $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, uma $\mathcal{R}$-seqüência $\sigma$ é uma seqüência sintática de $\mathcal{L}$ tal que, para todo $A \in \mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, se $A$ é um termo de $\sigma$ e $B \mathcal{R} A$, então $B = A$ ou $B$ precede $A$ em $\sigma$.

Segue-se imediatamente dessa definição que qualquer segmento inicial de uma $\mathcal{R}$-seqüência é uma $\mathcal{R}$-seqüência e, além disso, que toda fórmula que figure como primeiro termo de uma $\mathcal{R}$-seqüência é um elemento mínimo com respeito a $\mathcal{R}$.

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ascendência. Algumas convenções e definições merecem ser introduzidas:

a) Dada uma fórmula $A$, $\mathcal{R}A$ indica o conjunto das fórmulas que compreende $A$ e os elementos de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$ que precedem $A$ segundo a ordem $\mathcal{R}$ — i.e., o conjunto $\{B \in \mathfrak{F}_{\mathcal{L}} : B \mathcal{R} A\}$. Se $\Gamma$ é um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}\Gamma$ é o conjunto $\{B \in \mathfrak{F}_{\mathcal{L}} :$ para algum $A \in \Gamma$, $B \mathcal{R} A\}$. Dizemos que $\Gamma$ é *fechado* por $\mathcal{R}$ se $\Gamma = \mathcal{R}\Gamma$.

b) Seja $E$ uma enumeração qualquer de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$ e seja $\Gamma \subset \mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$. Então as $\mathcal{R}$-seqüências formadas com os elementos de $\mathcal{R}\Gamma$ formam um conjunto denotado por $\Sigma(\mathcal{R}\Gamma)$; se $\Gamma = \mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, escreveremos apenas $\Sigma(\mathcal{R})$ e denotaremos por $\Sigma(\mathcal{R}, n^+)$ o subconjunto de $\Sigma(\mathcal{R})$ cujos elementos são seqüências com $n^+$ termos.

$\sigma(\mathcal{R}\Gamma, E)$ é uma notação para o elemento de $\Sigma(\mathcal{R}\Gamma)$ que satisfaz a propriedade: se $i$ e $j$ são respectivamente os índices de $A$ e $B$ em $\sigma(\mathcal{R}\Gamma, E)$ e $i < j$, então $A \mathcal{R} B$

ou há um índice de $A$ em $E$ menor que todos os índices de $B$ em $E$. Se $\Gamma = \{A\}$, escrevemos simplesmente $\sigma(\mathcal{R} A, E)$ para $\sigma(\mathcal{R}\{A\}, E)$.

Seja $\sigma \in \Sigma(\mathcal{R}, n^+)$, para algum $n \in \omega$; a E-extensão de $\sigma$ com respeito a $\Gamma$ e $\mathcal{R}$ (em símbolos: $Ext(\sigma, \Gamma, \mathcal{R}, E)$) é a $\mathcal{R}$-seqüência $\sigma'$, assim definida: $\sigma'[n^+] = \sigma$ e, para $m \geq n^+$, $\sigma'_{m^+}$ é o termo de menor índice de $\sigma(\mathcal{R}\Gamma, E)$ que não é um termo de $\sigma[m]$.

c) Seja $E$ uma enumeração de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$. Queremos induzir uma enumeração $E^{\mathcal{R}}$ de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, tal que qualquer um dos seus segmentos iniciais seja uma $\mathcal{R}$-seqüência. Para tanto, procedemos da seguinte maneira:

— Inicialmente, para cada $n \in \omega$ definimos indutivamente $E(\mathcal{R}, E_{n^+})$, como se segue:

$$E(\mathcal{R}, E_1) = \sigma(\mathcal{R} E_1, E);$$

$$E(\mathcal{R}, E_{n^+}) = Ext(E(\mathcal{R} E_n), E_{n^+}, \mathcal{R}, E), \text{ para } n^+ > 1.$$

— Assim, para cada $n \in \omega$, se $E(\mathcal{R}, E_{n^+}) = \sigma$, então $\ell(\sigma) \geq n^+$ e $Rg(\sigma)$ é o conjunto $\mathcal{R}(Rg(E[n^+]))$. Além disso, para cada $n > 0$, $E(\mathcal{R}, E_{n^+})$ é uma $\mathcal{R}$-seqüência e $E(\mathcal{R}, E_n)$ é um segmento inicial de $E(\mathcal{R}, E_{n^+})$. Observemos, ainda, que cada seqüência do tipo $E(\mathcal{R}, E_{n^+})$ é uma seqüência sem repetição, isto é, quaisquer dois dos seus termos de índices distintos são distintos; e, finalmente, que $E_{n^+}$ é um termo de $E(\mathcal{R}, E_{n^+})$, para todo $n \in \omega$. Podemos, então, definir uma bijeção $E^{(\mathcal{R})}$, de $\omega - \{0\}$ em $\omega - \{0\}$, como se segue: $E^{(\mathcal{R})}(n^{+}) = m^{+}$ se e só se $m^{+}$ é o índice de $E_{n^{+}}$ em $E(\mathcal{R}, E_{n^{+}})$; claramente, $E^{(\mathcal{R})}$ é uma bijeção.

A enumeração $E^{\mathcal{R}}$, de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, é, então, a imagem de $E$ pela função $E^{(\mathcal{R})}$.

## 4. SEQÜÊNCIAS E FUNÇÕES VALORATIVAS.

Uma seqüência valorativa é uma sequência cujos termos são numerais. Se $\psi$ é uma seqüência valorativa, $\mu$ um conjunto de valores de verdade e $Rg(\psi) \subset \mu$, então dizemos que $\psi$ é uma *seqüência valorativa* de $\mu$.

Seja $\psi$ uma seqüência valorativa tal que $\ell(\psi) = n^{+}$, para algum $n \in \omega$. Então $g(\psi)$ (o número de Gödel de $\psi$) é o produto: $\pi_2^{m_1} \times \pi_3^{m_2} \times \ldots \times \pi_{n^+}^{m_n}$, onde $m_i$ é o natural denotado por $\psi_i$, para $1 \leqslant i \leqslant \ell(\psi)$.

Definimos, então, a relação $\prec$ para as seqüências valorativas da seguinte maneira: $\psi \prec \psi'$ se e só se $\ell(\psi) \leqslant \ell(\psi')$ e, se $\ell(\psi) = \ell(\psi')$, então o número de Gödel de $\psi$ é menor que o de $\psi'$. Claramente, $\prec$ é uma boa ordem recursiva para as seqüências valorativas finitas.

Seja $\mu$ um conjunto de valores de verdade, $\ell(\mu) = p^{+}$. Então $\mu$ é da forma $\{2^{i}\}$, $i \leqslant p$. Vamos denotar por $\Sigma(\mu, n^{+})$ o conjunto $\{\psi\colon\ \psi$ é uma seqüência valorativa, $\ell(\psi) = n^{+}$ e, para $1 \leqslant m \leqslant n^{+}$, $\psi_m \in \mu\}$. Seja $W$ a enumeração das seqüências valorativas induzida por $\prec$. Temos então:

Lema das seqüências valorativas: Para quaisquer $m, n \in \omega$, quaisquer $\mu, \mu'$ que são conjuntos de valores de verdade, quais quer $\psi, \psi'$ tais que $\psi \in \Sigma(\mu, m^+)$ e $\psi' \in \Sigma(\mu', n^+)$, se $m < n$ e $i, j$ são tais que $\psi = W_i$ e $\psi' = W_j$, então $i < j$.

Cada conjunto da forma $\Sigma(\mu, n^+)$ é, assim, um conjunto de termos de um segmento de $W$ e esse segmento pode ser definido da seguinte maneira: $W[i,j]$ tal que $i \leqslant k \leqslant j$ se e só se $\ell(W_k) = n^+$ e para $1 \leqslant k' < k$, $g(W_{k'}) < g(W_k)$.

$T$ é uma tabela de $\mu$ se $T$ é um conjunto da forma $\{\psi: \psi \in \Sigma(\mu, n^+)\}$ para algum $n \in \omega$; $n^+$ é dita então a *abscissa* de $T$ e $\ell(T)$, a *ordenada* de $T$. A *ordem canônica* de $T$ é a ordem $\prec$ acima definida para as seqüências valorativas, restrita aos elementos de $T$. Obviamente, se $T$ é uma tabela de $\mu$, a ordenada de $T$ é menor ou igual a $\ell(\mu)^{n^+}$.

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem proposicional, $\Gamma$ um conjunto não-vazio de fórmulas de $\mathcal{L}$, $\mu$ um conjunto de valores de verdade.

Uma *função valorativa* é uma função de $\Gamma$ em $\mu$. Dizemos que $\mu$ é *adequado* para $\mathcal{L}$ se o conjunto das constantes de $\mathcal{L}$ é um subconjunto de $\mu$. Se $\Gamma \subset \mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, $\mu$ é adequado para $\mathcal{L}$ e $f$ é uma função valorativa de $\Gamma$ em $\mu$, então $f$ é *regular* se, para toda constante $A$ de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, $f(A) = A$. Seja $V$ um conjunto de funções valorativas de $\Gamma$ em $\mu$ e seja $A \in \Gamma$; então, $A$ é *livre* em $V$ se, para todo $f \in V$, todo $x \in \mu$, existe $f' \in V$ tal que $f'(A) = x$ e, para todo $B \in \Gamma$, se $B \neq A$, então $f'(B) = f(B)$.

Seja $\mu$ adequado para $\mathcal{L}$. Uma *avaliação* de $\Gamma$ em $\mu$ é uma função valorativa regular de $\Gamma$ em $\mu$. Se $\Gamma = \mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$ e $\nu$ é uma avaliação de $\Gamma$ em $\mu$, então $\nu$ é uma *valoração* de $\mathcal{L}$ em $\mu$.

Seja $\sigma$ uma seqüência de fórmulas de $\mathcal{L}$ e $f$ uma função valorativa de $Rg(\sigma)$ em $\mu$. Então, também dizemos que $f$ é uma função valorativa de $\sigma$ em $\mu$ e, se $f$ for uma avaliação, dizemos que é uma avaliação de $\sigma$ em $\mu$.

Usamos a notação $\mu^{\Gamma}$ e $\mu^{\sigma}$ para o conjunto das avaliações de $\Gamma$ em $\mu$ e de $\sigma$ em $\mu$, respectivamente. Obviamente, se $\Gamma$ e $\sigma$ são finitos, $\ell(\mu^{\Gamma})$ e $\ell(\mu^{\sigma})$ são números naturais.

Um conjunto $V$ de avaliações de $\Gamma$ em $\mu$ é dito *normal* se, para toda fórmula atômica variável $A$, de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, tal que $A \in \Gamma$, $A$ é livre em $V$.

Seja $\sigma$ uma seqüência cujos termos pertencem a $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$ e $V$ um conjunto de funções valorativas de $\sigma$ em $\mu$; para $f \in V$, $f \int \sigma$ denota a seqüência valorativa $\psi$ tal que, para todo $i \in I(\sigma)$, $\psi_i = f(\sigma_i)$; e $V \int \sigma$ denota a tabela $\{\psi$: para algum $f \in V$, $\psi = f \int \sigma\}$.

Se $\Gamma$ é um subconjunto de $\Gamma'$ e $V$ é um conjunto de funções valorativas de $\Gamma'$ em $\mu$, então, para $f \in V$, $f[\Gamma]$ é a restrição de $f$ a $\Gamma$ e $V[\Gamma] = \{f'$: para algum $f \in V$, $f' = f[\Gamma]\}$.

Paralelamente, se $\sigma$ é uma subseqüência de $\sigma'$ e $V$ é um conjunto de funções valorativas de $\sigma'$ em $\mu$, então, $f[\sigma] = f[\mathrm{Rg}(\sigma)]$; se $\sigma = \sigma'[i,k]$: $f[i,k] = f[\sigma]$; se $\sigma = \sigma'[i]$: $f[i] = f[\sigma]$. Quando for conveniente, poderemos usar as abreviações $f /\!\!/ \sigma$ para $f[\sigma] \int \sigma$ e $V /\!\!/ \sigma$ para $V[\sigma] \int \sigma$. Claramente, se $\ell(\sigma) = 1$ e $\sigma_1 = A$, $f /\!\!/ \sigma = f(A)$; esse fato nos autoriza a usar a notação $f /\!\!/ A$ como sinônima de $f(A)$, quando convier. Nesse mesmo sentido $V /\!\!/ A$ poderá ser usado, e indicará, como é óbvio, o conjunto dos valores que os elementos de $V$ atribuem a $A$.

## 5. CADEIAS.

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem proposicional, $\mu$ um conjunto de valores de verdade adequado para $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ uma relação de ascendência para $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$.

Para todo $n \in \omega$, um *feixe* de abcissa $n^+$, para $\mathcal{R}$ e $\mu$, é uma função $\varphi^{n^+}$ que associa, a cada $\sigma \in \Sigma(\mathcal{R}, n^+)$, um subconjunto normal de $\mu^{\sigma}$.

Seja $\varphi$ uma família da forma $\{\varphi^{n^+}\}$, $n \in \omega$, onde, para cada $n$, $\varphi^{n^+}$ é um feixe de abcissa $n^+$, para $\mathcal{R}$ e $\mu$; $\varphi$ é dita uma *cadeia* para $\mathcal{R}$ e $\mu$ se e só se para todo $n \in \omega$, todo $i \leqslant n$ e para quaisquer $\sigma$, $\sigma'$, tais que $\sigma \in \Sigma(\mathcal{R}, i^+)$, $\sigma' \in \Sigma(\mathcal{R}, n^+)$ e $Rg(\sigma) \subset Rg(\sigma')$, temos que $(\varphi^{n^+}(\sigma))[Rg(\sigma')] = \varphi^{i^+}(\sigma')$.

Segue-se facilmente dessa definição:

a) para todo $n \in \omega$, todo $\sigma \in \Sigma(\mathcal{R}, n^+)$, se $\nu \in \varphi^{n^+}(\sigma)$ então, para todo $i \leqslant n^+$, ocorre que $\nu[i^+] \in \varphi^{i^+}(\sigma[i^+])$;

b) para todo $n \in \omega$, todo $\sigma \in \Sigma(\mathcal{R}, n^+)$, todo $i < n$, todo $\sigma' \in \Sigma(\mathcal{R}, i^+)$, se $\Gamma \subset (Rg(\sigma) \cap Rg(\sigma'))$, então $(\varphi^{n^+}(\sigma))[\Gamma] = (\varphi^{i^+}(\sigma'))[\Gamma]$.

Seja $E$ uma enumeração de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{R}$ uma relação de ascendência para $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$. Então, para $n \in \omega$, $\Sigma(E, \mathcal{R}, n^+)$ é o conjunto $\{\sigma\colon \sigma$ é uma $\mathcal{R}$-seqüência, $Rg(\sigma) \subset Rg(E^{\mathcal{R}}[n^+])$ e $Rg(\sigma) \not\subset Rg(E^{\mathcal{R}}[n])\}$. Verifica-se facilmente que:

c) $E^{\mathcal{R}}[n^+] \in \Sigma(E, \mathcal{R}, n^+)$.

d) para toda $\mathcal{R}$-seqüência finita $\sigma$, existe um único $n^+$ tal que $\sigma \in \Sigma(E, \mathcal{R}, n^+)$; assim, $\cup\{\Sigma(E, \mathcal{R}, n^+)\}$, $n \in \omega$ = $= \cup\{\Sigma(\mathcal{R}, m^+)\}$, $m \in \omega$.

Definimos, agora, $\varphi^{\omega,E}$ como o conjunto $\{\nu \in \mu^{\mathcal{L}}$: para todo $n \in \omega$, $\nu[Rg(E^{\mathcal{R}}[n^+])] \in \varphi^{n^+}(E^{\mathcal{R}}[n^+])\}$. Segue-se dessa definição que $\varphi^{\omega,E}[Rg(E^{\mathcal{R}}[n^+])] = \varphi^{n^+}(E^{\mathcal{R}}[n^+])$.

Lema 1: Se E é uma enumeração para $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{R}$ é uma relação de ascendência para $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, $\mu$ é adequado para $\mathcal{L}$ e $\varphi$ é uma cadeia para $\mathcal{R}$ e $\mu$, então $\varphi^{\omega,E}$ é um conjunto normal de valorações para $\mathcal{L}$ e $\mu$.

Prova: Suponhamos que $\varphi^{\omega,E}$ não seja normal. Então existem $\nu \in \varphi^{\omega,E}$, $A \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ e $\bar{x} \in \mu$ tais que, para todo $\nu' \in \mu$, se $\nu'(B) = \nu(B)$ para todo $B \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ tal que $B \neq A$, então $\nu(A) \neq \bar{x}$. Seja $n^+$ tal que $E^{\mathcal{R}}_{n^+} = A$. Como $\varphi^{n^+}(E^{\mathcal{R}}[n^+]) = \varphi^{\omega,E}[Rg(E^{\mathcal{R}}[n^+])]$ e como $A = E^{\mathcal{R}}_{n^+}$, concluímos que $\varphi^{n^+}(E^{\mathcal{R}}[n^+])$ não é normal para $\mu$ — o que contraria a definição de feixe. Assim, $\varphi^{\omega,E}$ é normal.

Seja agora $\varphi^{\omega}$ definido como o conjunto $\{\nu \in \mu^{\mathcal{L}}$: para todo $n \in \omega$, todo $\sigma \in \Sigma(\mathcal{R}, n^+)$, $\nu[Rg(\sigma)] \in \varphi^{n^+}(\sigma)\}$.

Lema 2: Para toda enumeração E de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, toda relação de ascendência $\mathcal{R}$ para $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, todo conjunto $\mu$ de valores de verdade e toda cadeia $\varphi$ para $\mathcal{R}$ e $\mu$, temos que $\varphi^{\omega,E} = \varphi^{\omega}$.

Prova:

I) Obviamente, $\varphi^{\omega} \subset \varphi^{\omega,E}$, pois $E^{\mathcal{R}}[n^{+}] \in \Sigma(\mathcal{R},n^{+})$, para todo $n \in \omega$; portanto, se, para todo $\sigma \in \Sigma(\mathcal{R},,n^{+})$, $\nu[Rg(\sigma)] \in \varphi^{n^{+}}(\sigma)$, então, para todo $n \in \omega$, $\nu[Rg(E^{\mathcal{R}}[n^{+}])] \in \varphi^{n}(E^{\mathcal{R}}[n^{+}])$.

II) Mostremos agora que $\varphi^{\omega,E} \subset \varphi^{\omega}$. Seja $\nu \in \varphi^{\omega,E}$. Então $\nu[Rg(E^{\mathcal{R}}[n^{+}])] \in \varphi^{n^{+}}(E^{\mathcal{R}}[n^{+}])$, para todo $n \in \omega$. Seja $m^{+}$ tal que $\sigma \in \Sigma(\mathcal{R},m^{+})$ e $n^{+}$ tal que $\sigma \in \Sigma(E,\mathcal{R},n^{+})$.

Como $Rg(\sigma) \subset Rg(E^{\mathcal{R}}[n^{+}])$, temos que:

1) $\nu[Rg(\sigma)] = (\nu[Rg(E^{\mathcal{R}}[n^{+}])])[Rg(\sigma)]$

2) $\varphi^{m^{+}}(\sigma) = (\varphi^{n^{+}}(E^{\mathcal{R}}[n^{+}]))[Rg(\sigma)]$

3) $(\nu[Rg(E^{\mathcal{R}}[n^{+}])])[Rg(\sigma)] \in (\varphi^{n^{+}}(E^{\mathcal{R}}[n^{+}]))[Rg(\sigma)]$

Por substituição em (3), obtemos, então:

4) $\nu[Rg(\sigma)] \in \varphi^{m^{+}}(\sigma)$.

Como m era qualquer, temos que $\nu \in \varphi^{\omega}$.

1º Corolário: Para quaisquer enumerações $E$, $E'$ de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$ e para qualquer cadeia $\varphi$ para $\mathcal{R}$ e $\mu$, $\varphi^{\omega,E} = \varphi^{\omega,E'}$.

2º Corolário: $\varphi^{\omega}$ é um conjunto normal de valorações de $\mathcal{L}$ em $\mu$.

Obviamente, para todo $V$ que é um conjunto normal de valorações de $\mathcal{L}$ em $\mu$ e para toda relação de ascendência $\mathcal{R}$ para $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, existe uma única cadeia $\varphi$ para $\mathcal{R}$ e $\mu$ tal que $\varphi^{\omega} = V$. Assim, podemos concluir:

3º Corolário: Dada uma relação de ascendência para $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, existe uma bijeção entre o conjunto $\{V \subset \mu^{\mathcal{L}}: V$ é normal$\}$ e o conjunto $\{\varphi: \varphi$ é uma cadeia para $\mathcal{R}$ e $\mu\}$; obviamente, essa bijeção é induzida por $\varphi^{\omega}$.

## 6. FATORIZAÇÕES.

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem proposicional e, para algum $k^+ \in \omega$, sejam $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k^+}$ tais que:

a) $\{\Gamma_i\}$, $i \leqslant k^+$ é uma partição de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$;

b) para $i \leqslant k^+$, $\Gamma_i$ é um conjunto recursivo;

c) $\Gamma_0 = \{A\colon A$ é uma constante de $\mathcal{L}\}$;

d) $\Gamma_{k^+}$ contém como elementos todas as variáveis de $\mathcal{L}$.

Seja $=_i$ a função identidade definida em $\Gamma_i$ e sejam $\Upsilon^1, \Upsilon^2, \ldots, \Upsilon^{k^+}$ tais que:

e) para $i \leqslant k$, $\Upsilon^i$ é uma seqüência finita de funções recursivas de $\Gamma_i$ em $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$;

f) $\Upsilon^0 = \{=_0\}$;

g) para alguma relação recursiva $\prec$, que é uma ordem estrita bem fundada para $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, para todo $i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, para todo $q$, $1 \leqslant q \leqslant \ell(\Upsilon^i)$ e para todo $A \in \Gamma_i$,

   I) toda variável proposicional que ocorre em $(\Upsilon^i)_q(A)$ ocorre em $A$;

   II) $(\Upsilon^i)_q(A) \prec A$.

Então, se $\mathcal{H}$ é a família $\{\langle \Gamma_i, \Upsilon^i \rangle\}$, $i \leqslant k^+$, $\mathcal{H}$ é uma fatorização para $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$; qualquer ordem estrita recursiva e bem fundada que satisfaça a condição g), para $\mathcal{H}$, será dita uma *ordem compatível* com $\mathcal{H}$.

Se $\mathcal{H} = \{\langle \Gamma_i, \Upsilon^i \rangle\}$, $i \leqslant k^+$, $\mathcal{H}^1$ denota a partição $\{\Gamma_i\}$, $i \leqslant k^+$, e $\mathcal{H}^2$, a família $\{\Upsilon^i\}$, $i \leqslant k^+$; além disso, $\mathcal{H}^1_i$ e $\mathcal{H}^2_i$ são notações alternativas para $\Gamma_i$ e $\Upsilon^i$, respectivamente; assim, se $i < \ell(\mathcal{H})$ e $q \leqslant \ell(\mathcal{H}^2_i)$, $(\mathcal{H}^2_i)_q$ será a função que é o q-ésimo termo de $\Upsilon^i$.

Para $i \leqslant \ell(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}^1_i$ é uma classe de $\mathcal{H}$; $\mathcal{H}^1_{\ell(\mathcal{H})}$ é a *classe simples* de $\mathcal{H}$ e os seus elementos são ditos *simples*; para $i < \ell(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}^1_i$ é uma classe *complexa* e os elementos de $\mathcal{H}^2_i$ são ditos os *divisores* de $\mathcal{H}^1_i$; o divisor de $\mathcal{H}^1_0$ é dito um *divisor impróprio* e, para $1 \leqslant i < \ell(\mathcal{H})$, os elementos de $\mathcal{H}^2_i$ são ditos *divisores próprios* de $\mathcal{H}^1_i$.

Se $A \in \mathcal{H}^1_0$, $A$ não tem $\mathcal{H}$-fatores. Se $A \in \mathcal{H}^1_i$, $1 \leqslant i < \ell(\mathcal{H})$, para cada termo $g$ de $\mathcal{H}^2_i$, $g(A)$ é um $\mathcal{H}$-fator próprio de $A$; se $A \in \mathcal{H}^1_{\ell(\mathcal{H})}$, $A$ é o $\mathcal{H}$-fator impróprio de $A$. Como qualquer ordem compatível com $\mathcal{H}$ é bem fundada, temos que, se $B$ é um $\mathcal{H}$-fator próprio de $A$, então o número de $\mathcal{H}$-fatores de $B$ é menor que o número de $\mathcal{H}$-fatores de $A$. Assim, podemos definir, por indução no número de $\mathcal{H}$-fatores próprios de $A$, a relação $\leqslant_{\mathcal{H}}$ como se segue: para todo $A$, todo $B$, de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, $B \leqslant_{\mathcal{H}} A$ se e só se $B = A$ ou existe um $\mathcal{H}$-fator próprio $C$, de $A$, tal que $B \leqslant_{\mathcal{H}} C$. Segue-se imediatamente dessa definição que $\leqslant_{\mathcal{H}}$ é uma relação de ascendência para $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$.

Dada uma fatorização $\mathcal{H}$ para $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, convém distinguir duas funções definidas a partir de $\mathcal{H}$ e adotar notações específicas para elas:

1) $\mathcal{C}\ell_{\mathcal{H}}$ é a função que associa, a cada $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, o índice da classe de $\mathcal{H}$ à qual $A$ pertence, i.e., $\mathcal{C}\ell_{\mathcal{H}}(A) = i$ se e só se $A \in \mathcal{H}_i^1$, para $1 \leqslant i \leqslant \ell(\mathcal{H})$. Assim, $\mathrm{Rg}(\mathcal{C}\ell_{\mathcal{H}})$ é o conjunto finito de naturais entre $0$ e $\ell(\mathcal{H})$.

2) $\mathcal{F}at_{\mathcal{H}}$ é a função que associa, a cada $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, a seqüência dos $\mathcal{H}$-fatores de $A$ na ordem dada por $\mathcal{H}$, se $A$ tiver fatores; e, se $A$ não tem fatores, $\mathcal{F}at_{\mathcal{H}}$ associa o conjunto vazio (diremos também: a *seqüência vazia*) a $A$. Podemos então, formular com precisão, para toda $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, se $\mathcal{C}\ell_{\mathcal{H}}(A) = i$, então:

I) se $i < \ell(\mathcal{H})$, $\mathcal{F}at_{\mathcal{H}}(A)$ é a seqüência $\mathcal{H}_1^2(A), \ldots, \mathcal{H}_{\ell(\mathcal{H}^2)}^2(A)$;

II) se $i = \ell(\mathcal{H})$, $\mathcal{F}at_{\mathcal{H}}(A) = \phi$.

Claramente, tanto $\mathcal{C}\ell_{\mathcal{H}}$ como $\mathcal{F}at_{\mathcal{H}}$ são funções recursivas. No que se segue faremos referência a $\{\mathcal{C}\ell_{\mathcal{H}}, \mathcal{F}at_{\mathcal{H}}\}$ como o conjunto das funções $\mathcal{H}$.

## 7. CONVENÇÕES DA METALINGUAGEM.

Se $\mathcal{E}$ é uma expressão da metalinguagem, convencionemos denotar por $(\mathcal{E})^{\alpha}/_{\beta}$ a expressão que é como $\mathcal{E}$ exceto por conter a expressão $\beta$ onde e apenas onde $\mathcal{E}$ contém a expressão $\alpha$. Se, para algum $t \in \omega$, $\{\mathcal{E}_p\}$, $p \leqslant t^+$, é uma família de formas sentenciais (i.e., sentenças ou sentenças abertas) da metalinguagem e se $\dagger$ é uma notação metalingüística para uma função de verdade clássica com $t^+$ argumentos, (i.e. para uma função de $\{V,F\}^{t^+}$ em $\{V,F\}$), então $\dagger(\{\mathcal{E}_p\}, p \leqslant t^+)$ é uma notação para uma forma sentencial que expressa a imagem de $\dagger$ quando aplicada à seqüência dos elementos de $\{\mathcal{E}_p\}$, $p \leqslant t^+$, tomados na ordem crescente. Em particular, $\mathit{Conj}(\{\mathcal{E}_p\}, p \leqslant t^+)$ e $\mathcal{D}\mathit{isj}(\{\mathcal{E}_p\}, p \leqslant t^+)$ denotam, respectivamente, a conjunção e a disjunção (de grau $t^+$) formadas com os elementos de $\{\mathcal{E}_p\}$, $p \leqslant t^+$.

Um *domínio* $\mathcal{D}$ é uma relação $n^+$-ária, para algum $n \in \omega$. Um domínio é da forma $[\![X, n^+]\!]$ se é o conjunto de todas as $n^+$-uplas formadas com os elementos de $X$. Como uma seqüência $\rho$, tal que $\ell(\rho) = n^+$, pode ser definida como uma $n^+$-upla ordenada pelos seus índices, podemos denotar, por $[\![X, n^+]\!]$, o conjunto de todas as seqüências $\rho$, tais que $\ell(\rho) = n^+$ e $Rg(\rho) \subset X$. É claro que, se $X$ é recursivo, $[\![X, n^+]\!]$ é, também, recursivo.

Um *nome* em $D$ é uma expressão da metalinguagem para designar univocamente um objeto de $D$. Uma *constante operatória* de $D$ em $D'$ é o nome de uma função de $D$ em $D'$; se $\beta$ é uma constante operatória, $\beta$ diz-se recursiva se a função por ela nomeada for recursiva. Uma *variável* em $D$ é um símbolo metalinguístico que, por convenção, assume valores em $D$. Se $\alpha$ é uma variável em $D$ e $D$ é um domínio de funções de $D'$ em $D''$, $\alpha$ se diz uma variável operatória de $D'$ em $D''$; $\alpha$ é recursiva se $D$ for um conjunto de funções recursivas. Se $\gamma$ é uma constante ou uma variável operatória de $D$ em $D'$, $\gamma$ é um operador de $D$ em $D'$. Um *termo* em $D$ é definido indutivamente como se segue:

a) uma variável em $D$ ou um nome em $D$ é um termo em $D$;

b) se, para algum $D'$, $\alpha$ é um termo em $D'$ e $\gamma$ é um operador de $D'$ em $D$, então a expressão $\gamma(\alpha)$ é um termo em $D$ (dizemos, nesse caso, que $\gamma$ e $\alpha$ são *componentes* de $\gamma(\alpha)$).

Um termo é *fechado* se não tem variáveis como componentes; caso contrário, ele é um *termo aberto*.

Uma *equação* $\mathcal{E}$ é uma expressão da forma $\alpha = \beta$, onde, para algum domínio $D$, $\alpha$ e $\beta$ são termos em $D$; $\alpha$ e $\beta$ são ditos, aqui, os *termos máximos* da equação $\mathcal{E}$. Se $\mathcal{E}$ é da forma $\alpha = \alpha$ e $\alpha$ é o numeral de 0, $\mathcal{E}$ é a *equação nula*.

Seja $\dagger$ uma função de verdade clássica, com $t^+$ argumentos, para algum $t^+ \in \omega$, e seja $\{\mathcal{E}_p\}$, $p \leq t^+$ uma família de equações. Se $m$ é uma forma sentencial da metalinguagem que pode ser parafraseada por uma expressão da forma $\dagger(\{\mathcal{E}_p\}, p \leq t^+)$, então $m$ se diz uma *metafrase* e, para $p \leq t^+$, $\mathcal{E}_p$ é uma equação de $m$.

Se $E$ é uma forma sentencial e $\alpha$ é uma variável, $(\forall\alpha)E$ e $(\exists\alpha)E$ denotam formas sentenciais que expressam, respectivamente, a quantificação universal e a quantificação existencial de $E$ com respeito a $\alpha$. Usamos a notação $(Q\alpha)$ para as expressões correspondentes a $(\forall\alpha)$ e $(\exists\alpha)$ e dizemos que $(Q\alpha)$ é um quantificador em $\alpha$.

A noção de *enunciado* (metalingüístico) pode ser, agora, assim explicitada: a) uma metafrase é um enunciado; b) se $\{S_p\}$, $p \leq t^+$, para algum $t^+ \in \omega$, é uma família de enunciados e $S$ é uma paráfrase de $\dagger(\{\mathcal{E}_p\}, p \leq t^+)$ — onde $\dagger$ é uma função de verdade clássica — então $S$ é um enunciado; c) se $Q\alpha$ é um quantificador em $\alpha$, $S'$ é um enunciado e $S$ é uma paráfrase de $Q\alpha S'$, então $S$ é um enunciado.

$S$ e $S'$ são enunciados *congruentes* se $\alpha$ e $\alpha'$ são variáveis para o mesmo domínio, $\alpha$ é uma variável livre de $S$ e $S' = (S)^{\alpha}/_{\alpha'}$.

Um *designador* é um termo fechado da metalinguagem cujos operadores são todos recursivos.

Um *designador efetivo* é o nome de um número natural ou:

a) um designador formado apenas por constantes operatórias recursivas e designadores efetivos; ou

b) um símbolo arbitrário, convencionalmente associado a um conjunto finito e linearmente ordenado de designadores efetivos.

Um elemento de um domínio $D$ é efetivamente designado na metalinguagem se ele é denotado por um designador efetivo. Um domínio $D$ é efetivamente definido na metalinguagem se é finito e se todos os seus elementos são efetivamente designados na metalinguagem.

Vamos destacar algumas classes de designadores:

I) os designadores sintáticos efetivos: são designadores de símbolos de $\mathcal{L}$, de fórmulas de $\mathcal{L}$, de conjuntos finitos e linearmente ordenados de designadores desses tipos. Assim, nomes para seqüências finitas de fórmulas são designadores sintáticos efetivos;

II) entre os designadores sintáticos não efetivos, destacamos os nomes metalingüísticos de conjuntos recursivos e não finitos de símbolos de $\mathcal{L}$ ou de fórmulas de $\mathcal{L}$;

III) os designadores valorativos efetivos: os numerais, as seqüências valorativas finitas e as tabelas;

IV) entre os designadores valorativos não efetivos, destacamos os nomes para imagens de funções valorativas cujo domínio é um conjunto não finito de fórmulas — embora eventualmente recursivo.

Seja $S$ um enunciado metalingüístico. O conjunto dos *termos relevantes* de $S$ — que será denotado por $(\theta S)$ — é o conjunto das distintas variáveis que ocorrem livres em $S$. Vamos dar o destaque necessário a algumas conhecidas propriedades da lógica clássica:

Lema 1 das metafrases: Se $m$ é uma metafrase, $\gamma \in (\gamma m)$, $\gamma$ é uma variável em $D$ e $t$ é um designador efetivo de $D$ na metalinguagem, então, se $S$ é da forma $m;{}^{\gamma}/_{t}$ ou da forma $(Q\gamma)m$, então $S$ é uma metafrase e $(\theta S) = (\theta\gamma) - \{\gamma\}$.

Lembremos, ainda, que se $m$ é uma metafrase, $m$ é uma forma sentencial metalingüística. Assim, se $(\theta m) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ e, para $1 \leqslant i \leqslant n$, $\gamma_i$ é uma variável em $D_i$, podemos referir-nos, como é usual, aos objetos que satisfazem $m$ — os quais, evidentemente, deverão ser n-uplas pertencentes a $D_1 \times \ldots \times D_n$. Se denotarmos por $D^m$ o conjunto dos objetos que satisfazem $m$, embora não tenhamos, por esse procedimento, construído necessariamente um designador efetivo, temos todavia que:

Lema 2 das metafrases: Se $D_1, \ldots, D_n$ são recursivos, $m$ é uma metafrase, e $\gamma \in (\theta m)$ se e só se para algum i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\gamma$ é uma variável em $D_i$, então $D^m$ é recursivo.

## 8. EQUAÇÕES E METAFRASES DE $\mathcal{H}$ E $\mu$.

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem proposicional, $\mu$ um conjunto de valores de verdade, $\mathcal{H}$ uma fatorização para $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$. Seja $F_{\mathcal{L},\mu}$ o conjunto das funções de $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$ em $\mu$.

Uma *equação valorativa* é uma equação na qual um dos termos máximos é um designador valorativo. Se $\beta$ é efetivo, então a equação se diz *efetiva*.

Vamos distinguir alguns tipos de equações valorativas.

Primeiramente, observemos que a equação nula é uma equação valorativa efetiva, pois contém o numeral de 0 como único termo máximo.

Consideremos, agora, as equações valorativas da forma $\alpha = \beta$, onde $\beta$ é um designador valorativo efetivo de um elemento de $\mu$. As equações desse tipo são ditas *pontuais*. Dentro dessa classe, um grupo relevante é constituído pelas equações da forma $\gamma(\alpha) = \beta$, onde $\gamma$ é um operador de $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$ em $\mu$ e $\alpha$ é um termo em $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$; uma equação desse último tipo é dita a *equação de valor* para $\gamma$ e $\alpha$ de parâmetro $\beta$.

Destaquemos, agora, as equações valorativas da forma $\alpha = \beta$, onde $\beta$ é um designador valorativo efetivo e $\alpha$ é um termo em um domínio de seqüências valorativas ou em um domínio de tabelas. Dizemos, então, que as equações desse primeiro grupo são equações *lineares* e que as do segundo grupo são equações *tabulares*.

Observemos que a equação nula é pontual, que as equações pontuais constituem um subconjunto das lineares e que essas últimas formam, por sua vez, um subconjunto próprio das equações tabulares.

Uma *equação de classe* em $\mathcal{H}$ é uma equação onde um dos termos máximos é um índice de classe de $\mathcal{H}$. Assim, uma equação desse tipo terá sempre a forma: $C\ell_{\mathcal{H}}(\alpha) = i$, onde $\alpha$ é um termo em $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$ e $i \leqslant \ell(\mathcal{H})$. Observemos que, para cada $\alpha$ que é uma variável em $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$, existem exatamente $\ell(\mathcal{H})^{+}$ distintas equações de classe em $\mathcal{H}$ cujo único termo relevante é $\alpha$. Denotemos, alternativamente, por $\|\mathcal{E}^{\alpha}_{\mathcal{H}}\|$ ou por $\{\mathcal{E}^{\alpha}_{i}\}$, $i \leqslant \ell(\mathcal{H})$ o conjunto de tais equações.

Uma *equação de valor* em $\mu$ é uma equação pontual do tipo $\gamma(\alpha) = \overline{p}$, onde $\overline{p} \in \mu$, $\alpha$ é um termo em $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$ e $\gamma$ é um operador de $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$ em $\mu$. Observemos que, para cada variável $\alpha$ em $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$ e cada operador de $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$ em $\mu$ (i.e., cada nome ou variável em $F_{\mathcal{L},\mu}$), existem exatamente $\ell(\mu)^{+}$ distintas equações desse tipo. Adotemos as notações $\|\mathcal{E}^{\gamma,\alpha}_{\mu}\|$ e $\{\mathcal{E}^{\gamma,\alpha}_{\overline{p}}\}$, $\overline{p} \in \mu$ para o conjunto das equações desse tipo.

Uma *equação valorativa modulada* por $\mathcal{H}$ e $\mu$ é uma equação $\mathcal{E}$ tal que:

I) $\mathcal{E}$ é da forma $Fat_{\mathcal{H}}(\alpha) = \beta$, onde $\alpha$ é um termo em $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ e $\beta$ é um designador efetivo de um elemento de $\mu$; ou

II) $\mathcal{E}$ é da forma $\gamma /\!\!/ Fat_{\mathcal{H}}(\alpha) = \beta$, onde $\alpha$ é um termo em $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, $\gamma$ é um termo em $F_{\mathcal{L},\mu}$ e $\beta$ é um designador efetivo de uma seqüência valorativa de $\mu$; ou

III) $\mathcal{E}$ é da forma $\delta /\!\!/ Fat_{\mathcal{H}}(\alpha) = \beta$, onde $\alpha$ é um termo em $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, $\delta$ é um termo no conjunto das partes de $F_{\mathcal{L},\mu}$ e $\beta$ é um designador efetivo de uma tabela em $\mu$.

Nos três casos, dizemos que $\beta$ é o *parâmetro efetivo* de $\mathcal{E}$.

Observemos que:

a) Se $\mathcal{E}$ é do tipo I, $\mathcal{E}$ é pontual e $(\theta\, \mathcal{E}) = \{\alpha\}$;

b) Se $\mathcal{E}$ é do tipo II, $\mathcal{E}$ é linear e $(\theta\, \mathcal{E}) = \{\alpha, \gamma\}$;

c) Se $\mathcal{E}$ é do tipo III, $\mathcal{E}$ é tabular e $(\theta\, \mathcal{E}) = \{\alpha, \gamma, \delta\}$.

Vamos adotar a notação $\| \mathcal{E}_{\mathcal{H},\mu} \|$ para o conjunto das equações valorativas moduladas por $\mathcal{H}$ e $\mu$.

Uma metafrase valorativa modulada por $\mathcal{H}$ e $\mu$ é uma metafrase cujas equações são nulas ou são equações valorativas moduladas por $\mathcal{H}$ e $\mu$.

## 9. DOS JOGOS ÀS DEFINICOES.

Seja $\mathcal{H}$ uma fatorização para $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$, $\mu$ um conjunto de valores de verdade adequado para $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$. Seja $\{N_m\}$, $m \leq t$, para algum $t \in \omega$, uma família de nomes da metalinguagem.

No que se segue, $A$ é uma variável em $\mathfrak{I}_{\mathcal{L}}$ e $\nu$ é uma variável em $F_{\mathcal{L},\mu}$, $I(\mathcal{H})$ é o conjunto $\{0,\ldots,\ell(\mathcal{H})\}$ e $I(N)$ o conjunto $\{0,\ldots,t\}$.

Sejam, ainda $PIF$ e $PIFPAF$ duas classes de funções tais que:

a) para cada $\S \in PIF$ existe uma $\S\P \in PIFPAF$;

b) o domínio de definição de uma $\S\P$ é o domínio de definição de $\S$;

c) cada par $\S$, $\S\P$ obedece, ainda às condições abaixo:

$PIF$: se $i = 0$ ou $i = \ell(\mathcal{H})$, $\S(m, i, \overline{p}) = 0$;
se $1 \leq i < \ell(\mathcal{H})$, $\S(m, i, \overline{p}) \leq m$.

$PIFPAF$: se $i = 0$, $\S\P(m, i, \overline{p})$ é a equação: $Fat_{\mathcal{H}}(A) = \overline{p}$;
se $i = \ell(\mathcal{H})$, $\S\P(m, i, \overline{p})$ é a equação nula;
se $1 \leq i < \ell(\mathcal{H})$: $\S\P(0, i, \overline{p})$ é a equação nula e,

a) se $\S(m^{+}, i, \overline{n}) = 0$, então $\S\P(m^{+}, i, \overline{n})$ é a equação: $\nu /\!\!/ Fat_{\mathcal{H}}(A) = \overline{\Psi}$, onde $\overline{\Psi}$ é um designador efetivo de uma seqüência valorativa $\Psi$ de $\mu$;

b) se $\S(m^+, i, \overline{n}) = m'$, para algum $m'$, tal que $1 \leq m' \leq m^+$, então $\S\P(m^+, i, \overline{n})$ é a equação: $N_{m'} /\!\!/ Fat_{\mathcal{K}}(A) = \tau^*$, onde $\tau^*$ é um designador efetivo de uma tabela $\tau$ de $\mu$.

Para $m \leq t$, definamos em seguida o *grau* $\S$ de m (em símbolos: $g_{\S}(m)$) como se segue: $g_{\S}(m) = max\{\S(m,i,\overline{p}),\ i \in I(\mathcal{K}),\ \overline{p} \in \mu\}$; assim, $g_{\S}(0) = 0$ e $g_{\S}(m^+) \leq m^+$.

Podemos definir, agora, para cada $\S\P \in PIFPAF$, uma função que associa, a cada $(m,i,\overline{p}) \in I(N) \times I(\mathcal{K}) \times \mu$, a metafrase $M_{\S\P}(m,i,\overline{p})$ – dita a *jogada* $(m,i,\overline{n})$ do *PIFPAF* $\S\P$ – da forma

$$\&_i \longrightarrow (\&_{\overline{p}} \longrightarrow \S\P(m,i,\overline{p}))$$

onde $\&_i$ é o elemento de índice i de $\left\| \&^A_{\mathcal{K}} \right\|$, $\&_{\overline{p}}$ é o elemento de índice $\overline{p}$ de $\left\| \&^{\nu, A}_{\mu} \right\|$, e a seta é uma notação para a implicação material.

U'a *mão* (m,i) de um *PIFPAF* $\S\P$, onde $m \in I(N)$ e $i \in I(\mathcal{K})$, é uma metafrase $M_{\S\P}(m,i)$, da forma:

$$Conj(\{M_{\S\P}(m,i,\overline{p})\},\ \overline{p} \in \mu)$$

onde $\S\P \in PIFPAF$; cada jogada $(m,i,\overline{p})$ se diz uma *jogada da mão* (m,i); obviamente, cada mão tem tantas jogadas quantos são os elementos de $\mu$.

Uma *partida* m de um *PIFPAF* $\S\P$, onde $m \in I(N)$, é uma metafrase $M_{\S\P}(m)$ da forma:

$$Conj(\{Conj(\{M_{\S\P}(m,i,\overline{n})\},\ \overline{n}\in\mu)\},\ i\in I(\mathcal{H})).$$

Assim, cada partida tem tantas mãos quantas são as classes de $\mathcal{H}$ e tem tantas jogadas quanto o produto do número de classes de $\mathcal{H}$ pelo número de elementos de $\mu$.

Vale ressaltar, aqui, uma correlação significativa entre $M_{\S\P}(m)$ e $g_{\S}(m)$, para $m \leqslant t$, garantida pelas definições acima:

Lema das partidas: Se $N_{m'}$ é um termo que figura em $M_{\S\P}(m)$, então $m' \leqslant g(m)$ e $g(m') \leqslant g(m)$.

Antes de dar mais um passo e propor a definição de uma mesa de *PIFPAF*, convém rememorar alguns pontos e fazer alguns esclarecimentos.

Lembremos, então, que $\leqslant_{\mathcal{H}}$ é uma relação de ascendência e, assim, dados quaisquer $A^*$ e n tais que $A^*$ é um designador efetivo de um $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ e n é um designador efetivo em $\omega$, o conjunto $\{\sigma \in \Sigma(\leqslant_{\mathcal{H}}, n^+):\ A = \sigma_{n^+}\}$ é recursivo; e, se h for a sua função característica, a equação $h(\sigma) = 1$ é uma metafrase sinônima a: $\sigma \in \Sigma(\leqslant_{\mathcal{H}}, n^+)$; assim, a expressão $m(x,A,\sigma)$, abaixo:

$$\sigma \in \Sigma(\leqslant_{\mathcal{H}}, x^+) \quad e \quad \sigma_{x^+} = A$$

é uma metafrase, $(\theta\, m(x,A,\sigma)) = \{x,A,\sigma\}$ e $m(x,A,\sigma)^{x}/_{n}\,{}^{A}/_{A^*}\,{}^{\sigma}/_{\sigma^*}$ é uma sentença verdadeira se e só se $\sigma^*$ for uma $\mathcal{H}$-seqüência de $n^+$ termos cujo último termo é $A^*$.

Recordemos ainda, por outro lado, que, dados uma rela ção de ascendência $\mathcal{R}$ e um conjunto normal de valorações $V$, uma cadeia $\varphi$ é induzida imediatamente, a saber, aquela em que cada feixe de abcissa $n^+$ é a classe das tabelas formadas pelas restrições dos elementos de $\nu$ às imagens das $\mathcal{R}$-seqüências de $n^+$ termos; e, como foi mostrado anteriormente, $V$ é exatamente o conjunto $\varphi^\omega$. Assim:

a) Se estivéssemos desejando nos valer de $\mathcal{H}$, ou seja, fazer uso da ferramenta que é uma fatorização, para enunciar uma definição recursiva de uma família finita $\{V_m\}$, $m \leq t$, onde cada elemento é um conjunto normal de funções valorativas regulares para $\mathcal{L}$ e $\mu$, e

b) se, além disso, tivéssemos querido reservar a família $\{N_m\}$, $m \leq t$, para fazer dos seus elementos nomes metalingüísticos de tais conjuntos,

então, seria sensato começar visando cada um desses conjuntos como um $N_m^\omega$, correspondente à cadeia $N_m$, para, então, tratar de compor com metafrases uma regra geral que nos ensinasse:

- a construir, para cada $m \leq t$ e cada $\sigma \in \Sigma(\leq_{\mathcal{H}}, 1)$, a tabela $N_m^1(\sigma)$ (definindo, assim, os feixes de $N_m^1$);
- a escolher, para cada $m \leq t$, cada $n > 1$, cada $\sigma \in \Sigma(\leq_{\mathcal{H}}, n^+)$, entre os elementos $\nu$ de $F_{\mathcal{L},\mu}$, cujos segmentos iniciais até $n$ pertencem a $N_m^n(\sigma)[n]$, quais são aqueles cujos segmentos iniciais até $n^+$ pertencerão a $N_m^{n^+}(\sigma)$, levando em conta, para tanto, apenas: o índice da classe a qual $A$ pertence em $\mathcal{H}$, o valor que $\nu$ atribui a $A$ e o comportamento

dos $\mathcal{H}$-fatores de $A$, presentes em $\sigma$, nas tabelas, já efetivamente construídas, que cada $N^n_{m'}$ associa a $\sigma[n]$, para cada $m' < n$.

Uma tal regra, que denotaremos por $M_{\S\P}(x,y)$, pode ser formulada pela metafrase:

se $x \in \omega$, $\sigma \in \Sigma(\leq_{\mathcal{H}}, x^+)$ e $A = \sigma_{x^+}$, então $v[Rg(\sigma)] \in N^x_y$ e $M_{\S\P}(y)$.

Como se vê, usamos y como variável em $I(N)$ e x como variável em $\omega$, pois a nossa indução será feita em $I(N) \times \omega$. Observemos, ainda, que $(\theta\, M_{\S\P}(y,x)) = \{v, A, \sigma, y, x\}$.

Se, agora, quantificarmos universalmente em $A$, $\sigma$ e x a metafrase $M_{\S\P}(x,y)$, para obter o enunciado $S_{\S\P}(y)$, então $S_{\S\P}(y)$ será:

para todo $A$, todo $\sigma$, todo x, $M_{\S\P}(x,y)$.

Podemos, então, dizer que uma *mesa* $C_{\S\P}(m)$ de um *PIFPAF* é um enunciado da forma:

$v \in N_m$ se e só se $S_{\S\P}(m)$

onde $S_{\S\P}(m)$ é uma abreviação para $S_{\S\P}(y)\, {}^{y}\!/_{m}$,
para enfim articular o que imaginamos como o jogo de um *PIFPAF* §¶, na forma de uma definição semântica para cálculos proposicionais decidíveis, enunciando:

Para toda $\mathcal{L}$ que é uma linguagem proposicional, toda $\mathcal{H}$ que é uma fatorização de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$, todo $\mu$ que é um conjunto de valores de verdade adequado para $\mathcal{L}$, para todo $t \in \omega$, toda $\{N_m\}$, $m \leqslant t$, que é uma família de nomes da metalinguagem, para todo §¶ que é um *PIFPAF* definido em $I(N) \times I(\mathcal{H}) \times \mu$ e para todo $m \leqslant t$, $D_{\S\P}(m)$ é a sentença:

Para toda função valorativa $\upsilon$, de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$ em $\mu$,

$$Conj(\{C_{\S\P}(m')\},\ m' \leqslant m).$$

## 10. ALGUNS RESULTADOS.

Se não estivéssemos, por força maior, obrigadas a interromper esse trabalho por aqui, continuaríamos a mostrar com detalhes como se provam os seguintes teoremas:

para toda linguagem proposicional $\mathcal{L}$, todo conjunto finito de valores de verdade $\mu$, toda fatorização de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$ e toda $\{N_m\}$, $m \leqslant t$, para algum $t \in \omega$, que é uma família de nomes metalingüísticos,

TEOREMA 1. Se §¶ é um *PIFPAF* definido em $I(N) \times I(\mathcal{H}) \times \mu$, então, para todo $m \leqslant t$, $D_{§¶}$ define um conjunto decidível de valorações de $\mathcal{L}$ em $\mu$.

TEOREMA 2. Para todo *PIFPAF* §¶, definido em $I(N) \times I(\mathcal{H}) \times \mu$, $D_{§¶}(0)$ é uma definição do maior subconjunto de funções valorativas, que é um conjunto normal de valorações de $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$ em $\mu$.

TEOREMA 3. Para todo *PIFPAF* §¶, definido em $I(N) \times I(\mathcal{H}) \times \mu$ e todo $m^{+} \in I(N)$, se, para todo $m' < m$, $N_{§¶(m')} \neq \phi$, então a condição necessária e suficiente para que $N_m$ não seja vazio é que, para todo $i^{+} < \ell(\mathcal{H})$ e todo $A^{*} \in \mathcal{H}^{1}_{i^{+}}$, a metafrase $\mathcal{D}isj(\{§¶(m^{+}, i^{+}, \overline{p})\}, \overline{p} \in \mu)\ {}^{A}/_{A^{*}}\ {}^{\nu}/_{\nu^{*}}$ seja uma sentença verdadeira, para algum $\nu^{*} \in F_{\mathcal{L},\mu}$ tal que $\nu^{*}[Fat_{\mathcal{H}}(A^{*})] \in N_m[Fat_{\mathcal{H}}(A^{*})]$.

TEOREMA 4. Se $m^{+} \in I(N)$, $\ell(\mu) = q$, §¶ é um *PIFPAF* definido em $I(N) \times I(\mathcal{K}) \times \mu$ tal que, para cada $i^{+} < \ell(\mathcal{K})$, cada $A^{*} \in \mathcal{K}^{1}_{i^{+}}$, e cada $v^{*} \in F_{\mathcal{L},\mu}$, tal que $v^{*} \in N_{m}[Fat_{\mathcal{K}}(A^{*})]$, existe um único $\overline{x} \in \mu$, tal que §¶$(m^{+}, i^{+}, x)$, então $N_{§¶}(m^{+})$ é um cálculo funcional q-valente, que pode ser introduzido por meio de $\ell(\mathcal{K})-2$ matrizes finitas, cada uma delas associada à função característica das classes $\mathcal{K}^{1}_{1}, \ldots, \mathcal{K}^{1}_{\ell(\mathcal{K})-1}$.

TEOREMA 5. Todas as lógicas de valorações decidíveis por tableaux semânticos são definíveis por um enunciado do tipo $D_{§¶}(1)$.

TEOREMA 6. Todos os cálculos proposicionais decidíveis têm uma definição do tipo $D_{§¶}(1)$ onde §¶ é um *PIFPAF* definido em $\{0,1\} \times \{0,1,2\} \times \mu$, e podem ser traduzidos para uma linguagem proposicional $\mathcal{L}'$ tal que $\kappa_{0}^{\mathcal{L}'} \subset \{\overline{0},\overline{1}\}$.

entre outros.