I. LINGUAGEM DO CÁLCULO SENTENCIAL

Uma linguagem formal é dada pela especificação de um vocabulário e das regras que definem suas expressões bem formadas. E uma linguagem sentencial é uma linguagem formal que tem um vocabulário composto de pelo menos duas categorias básicas de símbolos: variáveis sentenciais, também chamadas às vezes "letras sentenciais" e conectivos. Para as variáveis sentenciais, reserva-se de costume uma quantidade infinita enumerável de símbolos quaisquer, p. ex., determinadas letras maiúsculas com inteiros positivos usados como subscritos; o conjunto das variáveis de uma linguagem sentencial costuma ser dado juntamente com uma ordem decidível, dita a "ordem alfabética da linguagem". Os conectivos são freqüentemente apresentados como um conjunto finito de símbolos especiais, cada um deles associado a um inteiro, raramente superior a 2, dito seu "grau" ou "carência". Uma expressão da linguagem é uma seqüência finita de símbolos do seu vocabulário; o número de termos da seqüência é dito o *comprimento* da expressão. O núcleo da gramática de uma linguagem sentencial é constituído pela definição de expressão bem formada, ou *fórmula* da linguagem, apresentada por um procedimento recursivo composto de dois passos: o primeiro estipula que as variáveis sentenciais são as fórmulas básicas da linguagem, usualmente chamadas *fórmulas atômicas*; e o segundo indica como são obtidas as fórmulas complexas. Quando temos apenas variáveis e conectivos na linguagem, uma fórmula complexa costuma ser formada pela simples concatenação de um conectivo de carência n com n fórmulas de menor complexidade. Muitas vezes, no entanto, além das categorias básicas, acrescentam-se ao vocabulário símbolos auxiliares que podem auxiliar na leitura das fórmulas; um exemplo típico é dado pelo par de parênteses. Quando isso ocorre, a regra de obtenção de fórmulas complexas pode ter uma outra formulação.

A linguagem que apresentaremos é uma das linguagens sentenciais nas quais o Cálculo Sentencial Clássico (CS) pode ser formulado. Não é necessário, nesse momento, especificar quais os símbolos usados como variáveis sentenciais. Importa, no entanto, esclarecer que elas são tidas como dadas numa determinada ordem alfabética e que a linguagem terá um conectivo de carência 1 ($\neg$ - *negação*), e três conectivos primitivos de carência 2 ($\wedge$ - *conjunção*, $\vee$ - *disjunção*, $\rightarrow$ - *implicação*). Uma outra linguagem, diferindo desta apenas por conter um mais um símbolo de carência 2, ($\leftrightarrow$ - *equivalência*) será usada em determinadas ocasiões. Além disso, parênteses serão usados como símbolos de pontuação e a regra de formação das fórmulas complexas estipulará que são fórmulas as expressões construídas, a partir de quaisquer fórmulas já obtidas α e β, com os seguintes formatos: $\neg\alpha$; $(\alpha \wedge \beta)$; $(\alpha \vee \beta)$; $(\alpha \rightarrow \beta)$; se estivermos usando a linguagem que inclui a equivalência como um conectivo, também $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ será uma fórmula. A complexidade de uma fórmula α é número de ocorrências de conectivos em α; assim 0 é a complexidade das fórmulas atômicas e se m e n são as complexidades de α e β, respectivamente, $m+1$ é a complexidade de $\neg\alpha$, e $m+n+1$, a complexidade das demais. Dizemos que α é a única subfórmula imediata de $\neg\alpha$; e que α e β são as subfórmulas imediatas de $(\alpha \wedge \beta)$ e de $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$. A relação de subfórmula é recursivamente introduzida, estipulando-se que toda fórmula é subfórmula de si mesma e que uma fórmula α' é uma subfórmula de uma fórmula α, se for subfórmula imediata de alguma subfórmula de α.

Uma vez especificadas as variáveis sentenciais e os conectivos primitivos da linguagem, o conjunto das fórmulas fica perfeitamente caracterizado como um conjunto infinito e decidível. Vários algoritmos podem ser apresentados para decidir se um objeto qualquer é uma fórmula; futuramente teremos a oportunidade de conhecer um deles. Vale aqui observar ainda que, embora cada fórmula seja uma expressão de comprimento finito, não há um numero que seja o limite superior de comprimento das fórmulas.

II. O CÁLCULO SENTENCIAL CLÁSSICO - INTRODUÇÃO.

Muitos são os cálculos lógicos formulados em linguagens sentenciais do tipo acima especificado.

O mais importante de todos é, sem dúvida, o Cálculo Sentencial Clássico, também chamado Cálculo Proposicional Clássico ou, simplesmente, Cálculo Proposicional. Embora os motivos que podem ser apontados para justificar essa posição só devam vir a poder ser compreendidos em maior profundidade depois de feito o seu estudo, alguns dos pressupostos e objetivos que presidiram sua formulação podem já ser avançados.

Trata-se de um Cálculo voltado para o tratamento de um aspecto lógico fundamental das sentenças: as suas *extensões* - entenda-se, os seus valores de verdade. As sentenças são o universo deste cálculo, aquilo de que aqui se trata. E por sentença entende-se nesse contexto aquilo de que se pode predicar ser verdadeiro ou falso, ou seja aquilo a que cabe atribuir um dos dois valores de verdade classicamente considerados. O Cálculo Sentencial Clássico deve poder apresentar uma ferramenta que permita analisar esses objetos em simples e complexos, caracterizando, quando for o caso, os vários aspectos dessa complexidade, de tal maneira, que a propriedade, pela qual um objeto complexo é aceito como pertinente ao universo em causa - o seu valor de verdade - seja perfeitamente determinado pelos valores de verdades dos objetos mais simples que entram na sua composição e pelo tipo de composição exibida nessa análise. Além disso, pretende-se que sejam legítimos objetos deste universo todos aqueles que puderem ser construídos com tais ferramentas. Assim, o Cálculo Sentencial Clássico é o cálculo que trata de certos objetos, ditos sentenças, dotados de extensões que se comportam como funções de verdade; e que aceita que tudo o que puder ser tratado como uma função de verdade deve contar como objeto de seu universo e, assim, receber tratamento com suas ferramentas.

Como já se pode perceber, ao falarmos em funções de verdade, temos em vista aqui as funções de verdade clássicas, ou bivalentes, ou seja, aquelas definidas como operações no conjunto dos dois valores de verdade clássicos, o verdadeiro e o falso. Representando por "V" o valor de verdade "verdadeiro" e por "F" o "falso", uma função de verdade é simplesmente uma operação, com um número finito qualquer de argumentos, definida no conjunto {V, F}. Assim, a teoria geral dessas funções constitui um capítulo central do Cálculo Sentencial Clássico e constitui-se numa das principais vias pelas quais esse cálculo costuma ser apresentado. Por essa via, a noção de conseqüência, fundamental para a compreensão desse cálculo como uma lógica, é entendida como uma relação, entre conjuntos de sentenças e sentenças dadas, onde está garantida a preservação da verdade - melhor dizendo, do valor de verdade V. Essa forma de apresentação do cálculo é freqüentemente chamada "apresentação semântica", pelo fato de que os valores de verdade podem ser vistos como significados das sentenças, na medida em que são identificados às suas extensões.

Há, no entanto, outros modos de introduzir o Cálculo Sentencial Clássico, que não envolvem a teoria das funções de verdade. Com efeito, um outro caminho tradicional é o que, após apresentar a linguagem, introduz o cálculo como um sistema de regras dedutivas e a noção de conseqüência é associada à de dedutibilidade no sistema. Um dos pontos mais interessantes do estudo desse cálculo consiste na demonstração de que, quer por esta última via (dita sintática), quer pela via semântica, um mesmo cálculo está sendo apresentado.

Nas próximas seções, serão introduzidos conceitos preliminares que se mostrarão importantes para a apresentação e o desenvolvimento do estudo do Cálculo Sentencial pela via semântica.

III. . DEFINIÇÃO RECURSIVA DE TÁBUA DE VERDADE.

Iniciando a apresentação da semântica das funções de verdade, iremos definir recursivamente a noção de tábua de verdade

1.1) A tábua de verdade de grau 1 é a construção com 2^1 linhas contendo a 1-upla <V> na linha 1 e a 1-upla <F> na linha 2.

1)	V
2)	F

Tábua de Verdade de Grau 1

Dizemos que a linha 2 é a 1-conjugada da linha 1 e que a linha 1 é a 1-conjugada da linha 2. Assim, cada linha de uma tábua de grau 1 tem uma 1-conjugada.

1.2) Suponhamos que T ′ é uma tábua de verdade de grau n, com 2^n linhas, cada linha contendo uma n-upla formada com os elementos de {V,F} e que para $1 \leq j \leq 2^n$, cada linha j tem exatamente n i-conjugadas de grau n, i.e. que existem j_1, j_2,... j_n em T ′ tais que para $1 \leq i \leq n$, j_i é a i-conjugada de j na tábua T

′ de grau n.

Então a tábua T de grau n+1 é a construção obtida em 2^n passos sucessivos e ordenados, onde, para $1 \leq j \leq 2^n$ o passo j consiste em construir, a partir da j-ésima n-upla $< X_1, \ldots, X_n>$ de T′, duas n+1-uplas $< X_1, \ldots, X_n, V>$ e $< X_1, \ldots, X_n, F>$ que serão tomadas como duas linhas de T : a primeira dessas n+1-uplas será a linha de numeração 2j-1 e a segunda, a de numeração 2j.

As linhas 2j-1 e 2j serão as n+1 conjugadas, uma da outra. Além disso, se j' era a i-ésima conjugada de j em T', 2j'-1 será a i-ésima conjugada de 2j-1 em T e 2j' será a i-ésima conjugada de 2j em T. Dessa forma, T terá 2^{n+1} linhas e, para $1 \leq i \leq n+1$, cada linha terá uma i-conjugada. Observe-se ainda que a primeira linha de T constará da n+1-upla formada com n+1 ocorrências de V e a linha 2^{n+1} constará da n+1-upla formada com n+1 ocorrências de F.

Esquemas

T' (grau n)	T (grau n+1)
1) V V ... V ... V	2.1-1) V V... V ... V V
.	2.1) V V... V ... V F
.	.
j) X_1 X_2 ... X_i ... X_n	2.j-1) X_1 X_2 ... X_i ...X_n V
.	2.j) X_1 X_2 ... X_i ...X_n F
.	.
.	.
j')X_1 X_2 ... $X_{i'}$ ... X_n	2.j'-1)X_1 X_2 ... $X_{i'}$...X_n V
.	2.j')X_1 X_2 ... $X_{i'}$...X_n F
.	.
.	.
2^n) F F ... F ... F	2.2^n-1)F F ... F ...F V
	2.2^n)F F ... F ...F F

Assim, para todo $n \geq 1$, a tábua de verdade de grau n fica perfeitamente definida. Como cada uma das 2^n linhas contém uma n-upla, dizemos que a tábua de verdade de grau n tem n colunas e 2^n linhas.

Veremos a seguir que, a partir da definição acima, numa tábua de verdade de grau n, fica determinada não somente a quantidade de suas colunas e linhas, mas também a associação entre cada uma das 2^n n-uplas de Vs e Fs e a numeração da linha onde a n-upla aparece na tabela. Para entendermos essa última afirmação, vamos apresentar inicialmente um método de cálculo do número da linha a partir de sua constituição.

Seja $< X_1, \ldots, X_n>$ a n-upla da linha j e, para $1 \leq i \leq n$, seja $a_i = 0$, se $X_i = V$ e $a_i = 1$, se $X_i = F$; então a fórmula abaixo nos permite calcular a numeração da linha j:

$$\boxed{j = 1 + a_1.\, 2^{n-1} + a_2.\, 2^{n-2} + \ldots + a_n.\, 2^{n-n}}$$

Assim, por exemplo, se n = 3,

j		a_1	a_2	a_3			$<a_1\, a_2\, a_3>$
1	=	$1 + 0.2^{3-1}$	$+ 0.2^{3-2}$	$+ 0.2^{3-3}$	=	1 + 0 + 0 + 0	$< 0, 0, 0 >$
2	=	$1 + 0.2^{3-1}$	$+ 0.2^{3-2}$	$+ 1.2^{3-3}$	=	1 + 0 + 0 + 1	$< 0, 0, 1 >$
3	=	$1 + 0.2^{3-1}$	$+ 1.2^{3-2}$	$+ 0.2^{3-3}$	=	1 + 0 + 2 + 0	$< 0, 1, 0 >$
4	=	$1 + 0.2^{3-1}$	$+ 1.2^{3-2}$	$+ 1.2^{3-3}$	=	1 + 0 + 2 + 1	$< 0, 1, 1 >$
5	=	$1 + 1.2^{3-1}$	$+ 0.2^{3-2}$	$+ 0.2^{3-3}$	=	1 + 4 + 0 + 0	$< 1, 0, 0 >$
6	=	$1 + 1.2^{3-1}$	$+ 0.2^{3-2}$	$+ 1.2^{3-3}$	=	1 + 4 + 0 + 1	$< 1, 0, 1 >$
7	=	$1 + 1.2^{3-1}$	$+ 1.2^{3-2}$	$+ 0.2^{3-3}$	=	1 + 4 + 2 + 0	$< 1, 1, 0 >$
8	=	$1 + 1.2^{3-1}$	$+ 1.2^{3-2}$	$+ 1.2^{3-3}$	=	1 + 4 + 2 + 1	$< 1, 1, 1 >$

Como vemos, a cada j, $1 \leq j \leq 2^n$, corresponde uma e uma só n-upla de elementos do conjunto {0,1}, obtida pelo algoritmo descrito. Se, agora, substituirmos em qualquer dessas n-uplas o "0" por "V" e o "1" por "F", obteremos a n-uplos de Vs e Fs correspondentes à linha em questão.

No exemplo, acima, com n = 3, teremos:

j	(a_1, a_2, a_3)	n-upla
1	(0, 0, 0)	(V, V, V)
2	(0, 0, 1)	(V, V, F)
3	(0, 1, 0)	(V, F, V)
4	(0, 1, 1)	(V, F, F)
5	(1, 0, 0)	(F, V, V)
6	(1, 0, 1)	(F, V, F)
7	(1, 1, 0)	(F, F, V)
8	(1, 1, 1)	(F, F, F)

Por outro lado, levando-se em conta a propriedade aritmética, segundo a qual, para todo número j, entre 1 e 2^n, existe uma e somente uma n-upla $< a_{1,} a_2 \ldots a_n >$ de elementos do conjunto {0,1 } tal que $j = 1 + a_1 . 2^{n-1} + a_2 . 2^{n-2} + \ldots + a_n . 2^{n-n}$, verifica-se que a partir do número de uma linha da tabua, a n-upla de Vs e Fs que a compõe é univocamente determinada (sempre usando a associação acima introduzida, entre 0 e V, por um lado e 1 e F, por outro. Na verdade, a seqüência de 0s e 1s correspondente à n-upla $< a_{1,} a_2 \ldots a_n >$ nada mais é do que a representação do número de base decimal j na base 2; assim, qualquer algoritmo de transformação da representação de um numero, da base 10 para a base 2, gera um algoritmo de determinação da composição de uma linha da tabua a partir da sua numeração.

Dessa forma, dado o grau n de uma tábua de verdade, ficam determinados:

a) o número de suas colunas : n

b) o número de suas linhas : 2^n

c) para cada linha j, $1 \leq j \leq 2^n$, a n-upla da linha j.

Observemos que numa tábua de grau n, para $1 \leq j < j' \leq 2^n$, j e j' são i-conjugadas se e somente se $j=j'-2^{n-i}$. Em outras palavras: dada uma linha j, como j é da forma:

$$1 + a_1.\ 2^{n-1} + ...+ a_i.\ 2^{n-i} + ... + a_n.\ 2^{n-n}$$

a linha i-conjugada, j, deverá ser da forma:

$$1 + a_1.\ 2^{n-1} + ...+ a'_i.\ 2^{n-i} + ... + a_n.\ 2^{n-n}$$

onde $a_1,..., a_i$-1 e $a_{i+1},...,a_n$ são fixos, enquanto $a_i \neq a'_i$. Como em uma das duas teremos 0. 2^{n-i} e, na outra, 1. 2^{n-i} , e como as demais parcelas são fixas, a diferença entre as duas linhas i-conjugadas será exatamente 2^{n-i} .

Por outro lado, dada qualquer linha j podemos calcular, por esse método, qual é a linha j' que dela difere exatamente pelas colunas $b_1,..., b_m$, para $m \leq n$. Para tanto basta, tomar $(a_1, a_2,...,a)$ tal que:

$j = 1 + a_1.\ 2^{n-1} + a_2.\ 2^{n-2} + ...+ a_n.\ 2^{n-n}$ e calcular

$j'= 1 + a'_1.\ 2^{n-1} + a'_2.\ 2^{n-2} + ...+ a'_n.\ 2^{n-n}$ de forma a que:

para $i \in \{ b_1,..., b_m \}$, tenhamos $a_i \neq a'_i$;

para $i \notin \{ b_1,..., b_m \}$, tenhamos $a_i = a'_i$.

Por exemplo: Se n = 3, a linha 2 contém a n-upla (V, V, F) ; portanto $(a_1, a_2, a_3) = (0,0,1)$. Qual a linha que dela difere nas colunas 1 e 3, ou seja, qual a linha que contém a n-upla (F,V,V) ? Será a linha correspondente a (1, 0, 0). Será portanto a linha 5, pois:

$$1 + 1.\ 2^{3-1} + 0.\ 2^{3-2} + 0.\ 2^{3-3} = 1 + 2^3 + 0 + 0 = 1 + 4 = 5.$$

IV. **TABELAS DE VERDADE**

Seja Δ um conjunto finito de variáveis sentenciais, n o número de elementos de Δ; se $A_1,\dots, A_n$ é uma sequência formada com todos os elementos de Δ, a associação de $A_1,\dots, A_n$ à tábua de grau n é dita uma tabela de verdade para Δ e denotada por T ($A_1,\dots, A_n$). A seqüência $A_1,\dots, A_n$ é dita o cabeçalho da tabela. Observemos que como há n! permutações de $A_1,\dots, A_n$, há n! tabelas de verdade para um conjunto Δ com n elementos, cada uma delas, todavia, com um distinto cabeçalho.

Exemplo: Seja Δ = { P, Q } ; então temos duas tabelas de verdade para Δ:

T (P,Q)

	P	Q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

T (Q,P)

	Q	P
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

Analogamente, há 6 tabelas de verdade para { P, Q, R }, 24 para { P, Q, R, S }, etc...Naturalmente, se considerarmos uma seqüência, há uma única tabela que corresponde àquela seqüência; e como a seqüência é dada no cabeçalho da tabela, há uma única tabela com cabeçalho P, Q, R, uma única com cabeçalho P, R, Q, etc...Como há uma ordem alfabética para as letras sentenciais da linguagem, a tabela de verdade canônica para um conjunto Δ será aquela tabela que contém no cabeçalho a seqüência formada pelos elementos de Δ tomados na ordem alfabética. É fácil verificar que, dadas duas tabelas T e T ′ para um conjunto Δ de letras sentenciais, para cada letra j de T existe uma e só uma linha k de T ′que associa a cada elemento de Δ o valor a ele associado na linha j.

V. **VALORAÇÕES BOOLEANAS PARA FÓRMULAS CS.**

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das fórmulas CS (aqui consideramos a linguagem proposicional que contém a equivalência como conectivo primitivo). Uma valoração booleana para $\mathcal{F}$ é uma função v: $\mathcal{F} \Rightarrow \{$ V, F$\}$ tal que para quaisquer α, $\beta \in \mathcal{F}$,

v $(\neg\alpha)$ = V sse v (α) = F ;

v $(\alpha \wedge \beta)$ = V sse v (α) = v (β) = V ;

v $(\alpha \vee \beta)$ = V sse v (α) = V ou v (β) = V ;

v $(\alpha \rightarrow \beta)$ = V sse v (α) = F ou v (β) = V ;

v $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ = V sse v (α) = v (β).

Vê-se claramente que, nessa definição, os conectivos proposicionais comportam-se nas valorações boolenas como funtores de verdade e que o valor de verdade das fórmulas complexas é determinado pelos valores de verdade de suas subfórmulas imediatas. Seguem-se desse fato as seguintes propriedades:

(1) Se duas valorações booleanas v e v' concordam nas letras sentenciais de α, então elas concordam em α (dizemos que v e v' concordam em uma fórmula se elas atribuem a essa fórmula o mesmo valor).

Prova: por indução na complexidade de α (cx (α)).

<u>Base</u>: cx (α) = 0. Então α é uma letra sentencial e a afirmação é trivial.

Passo Indutivo.: seja cx (α) = n, n > 0 e suponhamos que para qualquer γ tal que cx (γ) < n, vale que, se v e v' concordam nas letras sentenciais de γ, então v (γ) = v' (γ). Como cx (α) > 0, ou $\alpha = \neg \alpha'$ ou $\alpha = (\alpha' * \alpha'')$ para $* \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$. Mas, todas as letras sentenciais de α' - ou de α' e de α'' - ocorrem em α, logo v e v' concordam em todas as letras sentenciais de α' - ou de α' e de α''. Logo pela hipótese de indução, v (α') = v' (α') - ou v (α') = v'(α') e v (α'') = v'(α''). Como os cinco conectivos são definidos como funções, segue-se que v (α) = v' (α).

(2) Se α' é obtida a partir de α pela substituição de uma subfórmula β de α pela fórmula β' então, se v (β) = v (β'), v (α) = v (α').

Prova: por indução em cx (α).

Obs.: o desenvolvimento detalhado da prova acima fica proposto como exercício. v' concorda com v em

Seja { $A_1,\ldots, A_n$ } o conjunto das letras sentenciais que são subfórmulas das fórmulas de um conjunto Γ ; duas valorações booleanas, v e v' são ditas equivalentes em { $A_1,\ldots, A_n$ } se e só se, para $1 \leq i \leq n$, v(A_i)=v'(A_i). Seja $\mathcal{V}$ uma classe de valorações booleanas equivalentes em { $A_1,\ldots, A_n$ }. Então:

(3) Para quaisquer v, v' $\in$ V e para qualquer α que é subfórmula de uma fórmula de Γ, v (α) = v' (α).

Prova: decorre de 1 , acima.

(4) Existem exatamente 2^n classes de valorações booleanas equivalentes em $\{ A_1,..., A_n \}$.

Prova: há exatamente 2^n n-uplas formadas com elementos de $\{ V, F \}$. Logo, há exatamente 2^n possibilidades de associar valores de verdade aos elementos de $\{ A_1,..., A_n\}$.

Podemos, então, estabelecer uma correspondência biunívoca entre as 2^n linhas da tabela canônica $T(A_1,..., A_n)$ e as 2^n classes acima mencionadas e ordenar essas classes pela ordem das linhas dessa tabela; assim, para $1 \leq j \leq 2^n$, V_j é a classe das valorações booleanas que atribuem a $A_1,..., A_n$ os valores que a elas são associadas na linha j de $T(A_1,.., A_n)$. Dessa forma, V_1 será a classe de valorações booleanas que associam V a cada elemento de $\{ A_1,..., A_n \}$ e V_{2^n} será a classe das valorações booleanas que associam F a todos os elementos de $\{ A_1,..., A_n \}$.

A escolha da tabela canônica foi feita para fixar uma ordem para as 2^n classes, $V_1, V_2,..., V_{2^n}$. No entanto, em qualquer tabela para o conjunto $\{ A_1,..., A_n \}$, há uma correspondência entre suas linhas e as 2^n classes que pode ser assim enunciada:

(5) Se T é uma tabela para $\{ A_1,..., A_n \}$, então para cada linha j, $1 \leq j \leq 2^n$, de T existe um e um só k, $1 \leq k \leq 2^n$ tal que V^k é a classe correspondente à linha j; e para cada V^k, $1 \leq k \leq 2^n$, existe uma e uma só linha j tal que a linha j é a linha correspondente a V^k - onde dizemos que uma linha corresponde a uma classe, se os valores de $A_1,..., A_n$ na linha são os mesmos que lhe são atribuídos pelas valorações da classe.

Assim, não somente a tabela canônica, mas também qualquer tabela para $\{A_1,..., A_n\}$ representará, em alguma ordem, o conjunto das 2^n classes de valorações booleanas para $\{A_1,...,A_n\}$. Portanto, não é necessário, para esse fim, que consideremos privilegiadamente a tabela canônica.

Dizemos, então que uma tabela é adequada para uma fórmula α - ou para um conjunto de fórmulas Γ - se ela contiver em seu cabeçalho todas as letras sentenciais que ocorrem em α - ou nos elementos de Γ.

Seja $T(A_1,..., A_n)$ uma tabela adequada para Γ e α uma subfórmula de uma fórmula de Γ. Para $1 \leq j \leq 2^n$, indicaremos por $v_j (\alpha)$ o valor que qualquer valoração booleana v, pertencente à classe correspondente à linha j, atribuirá à fórmula α. O fato de que esse valor é único e determinado é uma conseqüência da propriedade 1, acima. Podemos, então afirmar:

(6) Se T e T' são tabelas adequadas para Γ, j é uma linha de T, j' é uma linha de T 'e α é uma subfórmula de uma fórmula de Γ, então, se, para toda letra sentencial A_i que ocorre em Γ, $v_j(A_i) = v_{j'}(A_i)$, teremos que $v_j (\alpha) = v_{j'} (\alpha)$.

(7) α é uma tautologia se e somente se em qualquer tabela T adequada para α temos que para toda j que é uma linha de T, $v_j (\alpha) = v$.

(8) α é uma tautologia se e somente se existe uma tabela T adequada para α tal que, para toda linha j de T, $v_j (\alpha) = v$.

VI. COMPLETUDE FUNCIONAL DO CÁLCULO SENTENCIAL

Seja, então T (A_1, ..., A_n) uma tabela adequada para α. Definimos a função $[\alpha]^j$, para $1 \leq j \leq 2^n$, relativamente a essa tabela, como se segue: $[\alpha]^j = \alpha$, se $v_j(\alpha)$=V; $[\alpha]^j = \neg\alpha$, se $v_j(\alpha)$=F.

<u>Exemplo:</u> seja α a fórmula '$(P \wedge Q)$'. Em T(P, Q) teremos: $[(P \wedge Q)]^1 = (P \wedge Q)$; $[(P \wedge Q)]^2 = [(P \wedge Q)]^3 = [(P \wedge Q)]^4 = \neg(P \wedge Q)$.

Dizemos que uma fórmula é um letral se ela é uma letra sentencial ou a negação de uma letra sentencial. Assim, numa tabela T (A_1, ..., A_n), para $1 \leq i \leq n$ e para $1 \leq j \leq 2^n$, $[A_i]^j$ é um letral e o conjunto $\{[A_1]^j, [A_2]^j, ..., [A_n]^j\}$é dito conjunto dos letrais da linha j e denotado por L^j. Denotaremos, ainda, por $\wedge L^j$ a fórmula que é a conjunção generalizada dos letrais da linha j, observada a ordem em que as respectivas letras sentenciais ocorrem no cabeçalho da tabela T (A_1, ..., A_n).

<u>Observações:</u>

(Obs. 1) O conceito de conjunção generalizada de um conjunto finito e ordenado de fórmulas $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ pode ser definido por indução em k, como se segue:

- k=1: α_1 é a conjunção generalizada de $\{\alpha_1\}$;

- k >1: Seja γ a conjunção generalizada de $\{\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}\}$ então $(\gamma \wedge \alpha_k)$ é a conjunção generalizada de $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$.

Tomemos como exemplo, novamente, T(P, Q). Então, $\wedge L^1 = (P \wedge Q)$; $\wedge L^2 = (P \wedge \neg Q)$; $\wedge L^3 = (\neg P \wedge Q)$; $\wedge L^4 = (\neg P \wedge \neg Q)$.

Se considerarmos T (P, Q, R), teremos : $\wedge L^1 = ((P \wedge Q) \wedge R)$, $\wedge L^2 = ((P \wedge Q) \wedge \neg R)$, $\wedge L^3 = ((P \wedge \neg Q) \wedge R)$, etc...

(Obs. 2) O conceito de disjunção generalizada de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ é definido de modo análogo.

Examinemos, agora, algumas propriedades básicas dos letrais das linhas de uma tabela de verdade. Seja, então, j uma linha qualquer ($1 \leq j \leq 2^n$) de uma tabela $T(A_1, \ldots, A_n)$. Então:

(1) Para $1 \leq i \leq n$, $v_j[A_i]^j = V$.

Prova: por definição, se $v_j(A_i) = V$, $[A_i]^j = A_i$, assim, $v_j[A_i]^j = V$;

e se $v_j(A_i) = F$, $[A_i]^j = \neg A_i$; como $v_j(\neg A_i) = V$, $.v_j[A_i]^j = V$.

(2) Segue-se imediatamente de (1) que $v_j[\wedge L^j] = V$.

(3) Para $1 \leq j' \leq 2^n$, se $j' \neq j$ então existe i, $1 \leq i \leq n$, tal que $v_{j'}[A_i]^j = F$.

Prova: se $j' \neq j$ então a n-upla de valores de verdade da linha j', $(X_1', \ldots, X_n')$, difere da n-upla $(X_1, \ldots, X_n)$ de valores de verdade da linha j, i.e., existe i tal que $X_i' \neq X_i$. Temos dois casos :

(a) $X_i.=V$; nesse caso $[A_i]^j = A_i$ e $X_i' = F$, ou seja, $v_{j'}(A_i) = F$; assim, $v_{j'}[A_i]^j = F$;

(b) $X_i.=F$; nesse caso $[A_i]^j = \neg A_i$ e $X_i' = V$, ou seja, $v_{j'}(A_i) = V$; assim, $v_{j'}(\neg A_i)^j = F$, ou seja $v_{j'}[A_i]^j = F$.

(4) Segue-se imediatamente de (3) que, para $1 \leq j' \leq 2^n$, se $j' \neq j$ então $v_{j'}[\wedge L^j] = F$.

A partit de (2) e (4) obtemos o resultado : $\wedge L^j$ é uma fórmula que recebe V na própria linha j e recebe F em todas as demais linhas de $T(A_1, \ldots, A_n)$.

Antes de enunciar a propriedade seguinte, precisamos provar a seguinte proposição:

- Se α é a disjunção generalizada de um conjunto $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ então, para toda valoração booleana v, $v(\alpha) = V$ se e somente se para algum i, $1 \leq i \leq m$, $v(\beta_i)=V$.

Essa proposição pode ser provada por indução em m, como se segue:

- m=1: então $\alpha=\beta_1$ e $v(\alpha) = V$ se e só se $v(\beta_1) = V$;

- m>1: Seja γ a disjunção generalizada de $\{\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}\}$ e suponhamos que (H.I.) $v(\gamma)=V$ se e só se para algum i, $1 \leq i \leq m-1$, $v(\beta_i)= V$. Então $\alpha=(\gamma \vee \beta_m)$ e temos que provar que $v(\gamma \vee \beta_m)=V$ se e só se para algum i, $1 \leq i \leq m$, $v(\beta_i)=V$.

a) Suponhamos que $v(\gamma \vee \beta_m)=V$; então $v(\gamma)=V$ ou $v(\beta_m)=V$; se $v(\gamma)=V$, pela H.I. existe i, $1 \leq i \leq m-1$, tal que $v(\beta_i)=V$; portanto existe i, $1 \leq i \leq m$, tal que $v(\beta_i)=V$. Por outro lado, se $v(\beta_m)=V$, existe i,(a saber, m), $1 \leq i \leq m$, tal que $v(\beta_i)=V$.

b) Suponhamos que $v(\gamma \vee \beta_m)\neq V$; então $v(\gamma \vee \beta_m)=F$ e $v(\gamma)= v(\beta_m)=F$. Pela H.I. temos, nesse caso, que para $1 \leq i \leq m-1$, $v(\beta_i)=F$; como $v(\beta_m)=F$, segue-se que, para $1 \leq i \leq m$, $v(\beta_i)=F$. Assim, para $1 \leq i \leq m$, $v(\beta_i)\neq V$.

Uma vez provada essa propriedade, usando (2) e (4) obtemos:

(5) Se $\{j_1, \ldots, j_k\}\subseteq\{1, \ldots, 2^n\}$ e α é a disjunção generalizada de $\{\wedge L^{j1}, \ldots, \wedge L^{jk}\}$ então, para $1 \leq j \leq 2^n$, $v_j(\alpha)=V$ se e só se $j\in\{j_1, \ldots, j_k\}$.

Nesse caso, α é uma fórmula construída com as letras sentenciais $A_1, \ldots, A_n$ que expressa exatamente a função de verdade que recebe V nas n-uplas correspondentes às linhas de $\{j_1, \ldots, j_k\}$ e recebe F nas n-uplas correspondentes às linhas de $\{1, \ldots, 2^n\}-\{j_1, \ldots, j_k\}$.

O resultado expresso por (5) é usualmente conhecido como a **COMPLETUDE FUNCIONAL** da lógica proposicional clássica. Ele é, em geral, formulado da seguinte maneira:

Qualquer função n-ária de verdade pode ser expressa por uma fórmula construída com os conectivos de {$\wedge$, $\vee$, $\neg$} e n distintas letras sentenciais.

Uma vez que as linguagens $L_{\neg,\wedge}$, $L_{\neg,\vee}$ e $L_{\neg,\rightarrow}$ podem expressar todos os conectivos de $\{\wedge,\vee,\neg\}$, obtemos:

(6) As linguagens $L_{\neg,\wedge}$, $L_{\neg,\vee}$ e $L_{\neg,\rightarrow}$ são funcionalmente completas;

e, se '$\downarrow$', '$|$' expressam os dois conectivos de Sheffer,

(7) As linguagens $L_{\downarrow}$ e $L_{|}$ são funcionalmente completas.

Exercício:

Seja * um conectivo binário outro que os dois de Sheffer e L_* a linguagem que o contém como único conectivo. Mostre que L_* não é funcionalmente completa.

VII. SISTEMAS DEDUTIVOS – INTRODUÇÃO

Um esquema é uma expressão metalingüística contendo determinados símbolos (especificados em cada caso) usados como variáveis para símbolos ou expressões da linguagem objeto (também especificados em cada caso). Quando uma fórmula pode ser obtida pela substituição uniforme das variáveis metalinguísticas de um esquema ε por fórmulas da linguagem objeto, dizemos que a fórmula resultante é uma instância do esquiema.

Um sistema dedutivo pode ser apresentado por meio de esquemas. Nesse caso, seguindo Kleene, chamamos esses esquemas de POSTULADOS do sistema. Em geral, há dois tipos de postulados:

(1) Postulados que são esquemas de fórmulas: suas instâncias na linguagem objeto são ditas axiomas do sistema dedutivo;

(2) Postulados que são esquemas de regras : têm a forma $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n / \varepsilon_{n+1}$; as instâncias de $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ são ditas as hipóteses, a de ε_{n+1} a conclusão dessas hipóteses pela regra em causa.

Seja S um sistemas dedutivo.

- Uma DEDUÇÃO de α a partir de Γ em S é uma seqüência finita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ onde para $1 \leq i \leq n$, α_i satisfaz uma das condições seguintes: a) α_i é um axioma de S; b) $\alpha_i \in \Gamma$;$_i$ c) α_i é a conclusão, por uma regra de S, de hipóteses que precedem α_i nessa sequência. Quando existe tal dedução, dizemos que α é uma consequência dedutiva de Γ em S.
- Quando, numa dedução, nenhuma das fórmulas da sequência foi obtida pela condição b) acima dizemos que a dedução é uma PROVA de α em S e que α é um TEOREMA de S. Assim, um teorema de S é uma fórmula para a qual existe uma dedução em S a partir do conjunto vazio

Quando um cálculo lógico é apresentado por meio de um sistema dedutivo, dizemos que o sistema é uma base axiomática para essa lógica. As leis dessa lógica serão os teoremas do sistema; a noção de consequência nessa lógica é definida como consequência dedutiva no sistema.

VIII. UM SISTEMA DEDUTIVO PARA O CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSSICO E ALGUNS DOS SEUS SUBSISTEMAS

Uma base axiomática para a lógica proposicional clássica é dada pelo sistema C, abaixo, formado por 11 postulados:

$P_1 : (\alpha\to(\beta\to\alpha))$

$P_2 : ((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))$

$P_3 : \alpha,\ (\alpha\to\beta)\ /\ \beta$

$P_4 : ((\alpha\wedge\beta)\to\alpha)$

$P_5 : ((\alpha\wedge\beta)\to\beta)$

$P_6 : (\alpha\to(\beta\to(\alpha\wedge\beta)))$

$P_7 : (\alpha\to(\alpha\vee\beta))$

$P_8 : (\beta\to(\alpha\vee\beta))$

$P_9 : ((\alpha\to\gamma)\to((\beta\to\gamma)\to((\alpha\vee\beta)\to\gamma)))$

$P_{10} : ((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha))$

$P_{11} : (\neg\neg\alpha\to\alpha)$

A equivalência é nesse sistema, tratada como um símbolo assim definido:

$$(\alpha\leftrightarrow\beta)=_{\text{def}} ((\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha))$$

O cálculo proposicional clássico é apenas um exemplo de cálculo lógico que pode ser introduzido por meio de um sistema de postulados. Vamos, em seguida, enumerar outros cálculos proposicionais, todos eles mais fracos do que o clássico, que, não somente podem ser dados por um conjunto de postulados, mas por um subconjunto dos postulados que definimos.

São eles:

-I.I. (lógica implicativa intuicionista) : dada por P_1, P_2, P_3;

-P.I. (lógica positiva intuicionista) : dada por P_1 a P_9;

-M. (lógica minimal) : dada por P_1 a P_{10} .

Um dos mais famosos cálculos proposicionais não clássicos, I., o cálculo proposicional intuicionista, pode ser também obtido se acrescentamos aos postulados P_1 a P_{10} um novo postulado:

P_{12} : $\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$.

Observemos que os sistemas I.I., P.I., M., I. e C. têm em comum as seguintes características:

- a única regra primitiva de que dispõem é P_3;

- todos eles têm P_1, P_2, P_3 entre seus postulados.

Vamos aplicar conceitos anteriormente introduzidos para obter em seguida algumas definições e enunciar algumas propriedades que valem para um sistema S que satisfaça a condição de apresentar as duas características mencionadas acima (ter P_3 como única regra e conter P_1, P_2, P_3).

Seja então S um sistema que satisfaz essa condição

- Uma <u>dedução de α a partir de Γ</u> em S é uma seqüência finita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ onde $\alpha=\alpha_n$ e, para $1 \leq i \leq n$, a) $\alpha_i \in \Gamma$; ou b) α_i é um axioma de S; ou c) existem j e k, j<i, k<i tais que $\alpha_k = (\alpha_j \rightarrow \alpha_i)$ (ou seja, α_i é a conclusão, por P_3, de hipóteses que precedem α_i na seqüência em causa).

- α é dedutível de Γ em S se existe uma seqüência que é uma dedução de α a partir de Γ em S; para indicar esse fato, escrevemos: $\Gamma \vdash_S \alpha$. (Obs.: quando, pelo contexto, fica claro qual o sistema usado, podemos escrever simplesmente $\Gamma \vdash \alpha$).

- Uma <u>prova de α</u> em S é uma dedução de α a partir do φ. Assim, numa prova $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, cada α_i é um axioma de S ou foi obtido a partir de fórmulas anteriores por Modus Ponens.

- é um <u>teorema</u> de S se existe uma prova de α em S. Indicamos esse fato por : $\vdash_S \alpha$ (ou quando o contexto permitir, por: $\vdash \alpha$).

As seguintes propriedades valem para S:

(1) Se $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ é uma dedução de α_n a partir de Γ em S, então, para todo Δ tal que $\Gamma \subset \Delta$ e para $1 \leq i \leq n$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_i$ é uma dedução de α_i a partir de Δ em S.

(2) Se $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ é uma dedução de α_n a partir de Γ em S e $\beta_1,\ldots, \beta_m$ é uma dedução de β_m a partir de Δ em S, as sequências $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, $\beta_1,\ldots, \beta_m$ e $\beta_1,\ldots, \beta_m, \alpha_1,\ldots,\alpha_n$ são deduções de β_m e de α_n , respectivamente, a partir de $\Gamma \cup \Delta$ em S.

(3) Seja $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ uma dedução de α_n a partir de Γ em S, e para cada i, $1 \leq i \leq n$, tal que $\alpha_i \in \Gamma$, seja D_i uma seqüência de fórmulas que é uma dedução de α_i a partir de Δ em S. Então a seqüência obtida substituindo-se em $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ cada $\alpha_i \in \Gamma$ pela seqüência D_i é uma dedução de α_n a partir de Δ em S.

(4) Se $\Gamma \vdash_s \alpha$, então existe um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash_s \alpha$.

(5) As seguintes "regras de abreviação" valem para S:

-R1.1 : α / $\beta\rightarrow\alpha$

-R2.1 : $\alpha\rightarrow\beta$ / $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)$

-R2.2 : $\alpha\rightarrow$, $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)$ / $\alpha\rightarrow\gamma$

-R2.3 : $\alpha\rightarrow\beta$, $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)$, α / γ

Observemos que :

a) "regra de abreviação" é um termo que designa, na verdade, uma estratégia dedutiva- e não uma regra primitiva do sistema.

b) usamos a nomenclatura do tipo Rn.m, acima, como um método para indicar qual a estratégia de cada uma das regras: n indica o número do postulado usado como "premissa maior" e m é o número de aplicações de Modus Ponens envolvidos no procedimento.

Assim, R1.1, α / $\beta\rightarrow\alpha$ é desenvolvida como se segue:

.

(i) α

.

.

(k) $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$ Postulado 1

(k+1) $\beta\rightarrow\alpha$ Modus Ponens

Analogamente, este é o desenvolvimento de R2.2:

.

.

(i) $\alpha\to\beta$

.

.

(j) $\alpha\to(\beta\to\gamma)$

.

.

(k) $(\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))$ Postulado 2

(k+1) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)$ 1º Modus Ponens

(k+2) $\alpha\to\gamma$ 2º Modus Ponens

(6) Os seguintes teoremas, entre outros, são demonstráveis em S:

6.1) $\vdash_s \alpha\to\alpha$

6.2) $\vdash_s (\alpha\to\beta)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))$

6.3) $\vdash_s (\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\beta\to(\alpha\to\gamma))$

Prova de 6.1)

1) $\alpha\to(\alpha\to\alpha)$ Ax 1
2) $\alpha\to((\alpha\to\alpha)\to\alpha)$ Ax 1
3) $(\alpha\to(\alpha\to\alpha))\to((\alpha\to((\alpha\to\alpha)\to\alpha))\to(\alpha\to\alpha))$ Ax 2
4) $(\alpha\to((\alpha\to\alpha)\to\alpha))\to(\alpha\to\alpha)$ 1,3, MP
5) $\alpha\to\alpha$ 2,4 MP

Apresentaremos futuramente as provas de 6.2) e de 6.3).

IX. O TEOREMA DA DEDUÇÃO PARA ESSES SISTEMAS

A próxima propriedade dos sistemas S é :

(6) $\Gamma \cup\{\alpha\} \vdash_S \beta$ se e só se $\Gamma \vdash_S \alpha\rightarrow\beta$.

A implicação da esquerda para a direita contida em (6) expressa uma propriedade importante desses sistemas e é conhecida como "teorema da dedução". Vamos, abaixo, formular e demonstrar esse metateorema:

Teorema da Dedução: Se $\Gamma \cup\{\alpha\} \vdash_S \beta$ então $\Gamma \vdash_S \alpha\rightarrow\beta$.

O teorema da dedução (TD) será provado por meio de uma indução feita sobre o comprimento da dedução de uma fórmula β a partir de um conjunto $\Gamma \cup\{\alpha\}$ em S. O argumento consistirá na prova das seguintes duas premissas, relacionadas abaixo como a premissa "base" e a premissa "passo indutivo".

Base: Para toda dedução em S, de uma fórmula β a partir de um conjunto $\Gamma \cup\{\alpha\}$, que é uma seqüência de comprimento 1, existe uma dedução em S, de $\alpha\rightarrow\beta$ a partir de Γ.

Passo indutivo: Para todo número natural n, maior que 1,

se, para toda dedução em S, de uma fórmula β' a partir de $\Gamma'\cup\{\alpha'\}$, que é uma seqüência de comprimento menor que n, vale que existe uma dedução em S, de $\alpha'\rightarrow\beta'$ a partir de Γ',

então, para toda dedução em S, de uma fórmula β a partir de $\Gamma\cup\{\alpha\}$ que é uma seqüência de comprimento n, vale que existe uma dedução em S, de $\alpha\rightarrow\beta$ a partir de Γ.

Se provarmos essas duas sentenças teremos provado, por indução, o teorema da dedução.

Prova do TD:

1-Prova da base: Se a dedução de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ tem apenas 1 linha, então um dos casos, abaixo, ocorre:

a) β é um axioma; b) $\beta \in \Gamma$. Ora, nos casos a) e b), temos que $\Gamma \vdash_s \beta$; logo, por R1.1, $\Gamma \vdash_s \alpha \to \beta$. No caso c), $\alpha \to \beta$ é $\alpha \to \alpha$ e $\vdash_s \alpha \to \alpha$; logo, $\Gamma \vdash_s \alpha \to \beta$.

2-Prova do passo indutivo: Suponhamos que uma dedução em S de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ tem n linhas (n>1) e que : (H.I.) para toda dedução em S de uma fórmula β' a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ como menos de n linhas, existe em S uma dedução de $\alpha \to \beta'$ a partir de Γ. Consideremos agora a dedução de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$. Aqui temos quatro casos: a) β é axioma; b) $\beta \in \Gamma$; c) β é α; d) β foi obtida por Modus Ponens a partir de γ, $\gamma \to \beta$. Nos casos a), b) e d), obtemos a conclusão esperada pelos mesmos argumentos usados na prova da base. Suponhamos que ocorra o caso d). Então os segmentos iniciais da dedução em questão que vão até γ e até $\gamma \to \beta$ são deduções em S de γ a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ e de $\gamma \to \beta$ a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ com menos que n linhas. Logo, pela H.I., existem deduções em S de $\alpha \to \gamma$ e de $\alpha \to (\gamma \to \beta)$ a partir de Γ. Ora, a concatenação das duas deduções é, ainda, uma dedução em S a partir de Γ e nela figuram $\alpha \to \gamma$ e $\alpha \to (\gamma \to \beta)$. Prolongando essa dedução com o auxílio de R2.2, obtemos uma dedução em S de $\alpha \to \beta$ a partir de Γ.

Segue-se, então, que o TD vale para quaisquer Γ, α, β tais que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ em S.

Obs: A "volta do TD, i.e. : $\Gamma \vdash_s \alpha \to \beta \Rightarrow \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_s \beta$ vale trivialmente em qualquer sistema que contenha M. Ponens.

Um fato relacionado ao TD que não pode deixar de ser notado é o seguinte: os únicos postulados que intervieram de forma significativa na sua demonstração foram os três primeiros! Se levarmos em conta que, no passo indutivo da demonstração é necessário mostrar que a propriedadade é conservada pelas regras do sistema (nestes aqui, por Modus Ponens, uma vez que este é o único postulado desses sistemas que tem a forma de regra) podemos concluir que o TD vale para um sistema qualquer que contenha a lógica implicativa intuicionista, desde que não contenha entre seus postulados outra regra alem de Modus Ponens! Isso não quer dizer que o TD não valerá no caso do sistema conter outras regras; mas significa que, quando não contém, a demonstração do TD para tal sistema é exatamente a mesma demonstração que aqui foi dada!

Fazendo uso do TD, vejamos agora as provas de 6.2 e 6.3 prometidas acima.

Mostremos primeiramente que: $\alpha\to\beta,\ \beta\to\gamma \vdash_s \alpha\to\gamma$

1) $\alpha\to\beta$	hipótese
2) $\beta\to\gamma$	hipótese
3) $(\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma))$	axioma
4) $\alpha\to(\beta\to\gamma)$	2,3 MP
5) $(\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma)$	axioma
6) $((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma)$	1,5 MP
7) $(\alpha\to\gamma)$	4,6 MP

Usando o TD, obtemos: $\alpha\to\beta \vdash_s (\beta\to\gamma) \to (\alpha\to\gamma)$; e, novamente pelo TD, obtemos 6.2) $\vdash_s (\alpha\to\beta) \to ((\beta\to\gamma) \to (\alpha\to\gamma))$.

Obviamente, poderíamos construir uma dedução direta de $\alpha\to\beta \vdash_s (\beta\to\gamma) \to (\alpha\to\gamma)$; e, pelo TD, a dedução acima poderia ser usada como ferramenta heurística para essa construção. Construamos, então, a partir da dedução acima, uma dedução de $(\beta\to\gamma) \to (\alpha\to\gamma)$ a partir de $\alpha\to\beta$. Essa nova construção conterá, entre outras, sete linhas onde ocorrerão sete implicações com um mesmo antecedente, a saber, a hipótese eliminada, $\beta\to\gamma$, e cujos consequentes serão as fórmulas que ocorrem nas sete linhas da dedução acima (aqui destacadas em vermelho):

1) $\alpha\to\beta$ hipótese

2) $(\alpha\to\beta) \to (\beta\to\gamma) \to (\alpha\to\beta)$ Ax. 1

3) $(\beta\to\gamma) \to (\alpha\to\beta)$ 1,2 MP

4) $(\beta\to\gamma)\to((\beta\to\gamma)\to(\beta\to\gamma))$ Ax. 1

5) $(\beta\to\gamma)\to(((\beta\to\gamma)\to(\beta\to\gamma))\to(\beta\to\gamma))$ Ax. 1

6) $(\beta\to\gamma)\to((\beta\to\gamma)\to(\beta\to\gamma))\to((\beta\to\gamma)\to(((\beta\to\gamma)\to(\beta\to\gamma))\to(\beta\to\gamma)))\to((\beta\to\gamma)\to(\beta\to\gamma)))$ Ax. 2

7) $((\beta\to\gamma)\to(((\beta\to\gamma)\to(\beta\to\gamma))\to(\beta\to\gamma)))\to((\beta\to\gamma)\to(\beta\to\gamma)))$ 4,6 MP

8) $(\beta\to\gamma) \to (\beta\to\gamma)$ 5,7 MP

9) $(\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma))$ Ax. 1

10) $(\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to ((\beta\to\gamma)\to((\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma)))$ Ax. 1

11) $(\beta\to\gamma) \to ((\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma)))$ 9,10 MP

12) $((\beta\to\gamma)\to(\beta\to\gamma)) \to (((\beta\to\gamma) \to ((\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma)))) \to((\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma)))$ Ax. 2

13) $(((\beta\to\gamma) \to ((\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma)))) \to((\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma))$ 8,12 MP

14) $(\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma))$ 11, 13, MP

15) $((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))$ Ax. 2

16) $((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma)) \to ((\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma)))$ Ax. 1

17) $(\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))$ 15,16 MP

18) $((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta))\to(((\beta\to\gamma)\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))\to((\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))$ Ax.2

19) $(((\beta\to\gamma)\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))\to((\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))$ 3,18 MP

20) $(\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))$ 17,19 MP

21) $((\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma))) \to (((\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))) \to ((\beta\to\gamma)\to (\alpha\to\gamma)))$ Ax.2

22) $((\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))) \to ((\beta\to\gamma)\to (\alpha\to\gamma))$ 14,21 MP

23) $(\beta\to\gamma) \to (\alpha\to\gamma)$ 20,22 MP

1) $\alpha\to\beta$ hipótese

2) $(\alpha\to\beta) \to (\beta\to\gamma) \to (\alpha\to\beta)$ Ax. 1

3) $(\beta\to\gamma) \to (\alpha\to\beta)$ 1,2 MP

4) $((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta))\to(((\beta\to\gamma)\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))\to((\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))$ Ax.2

5) $(((\beta\to\gamma)\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))) \to ((\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to (\alpha\to\gamma))$ 3,4 MP

6) $((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))$ Ax. 2

7) $((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma)) \to ((\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma)))$ Ax. 1

8) $(\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))$ 6,7 MP

9) $(\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))$ 5,8 MP

10) $(\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma))$ Ax.1

11) $((\beta\to\gamma) \to (\alpha\to(\beta\to\gamma))) \to (((\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))) \to ((\beta\to\gamma)\to (\alpha\to\gamma)))$ Ax.2

12) $((\beta\to\gamma) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma)) \to (\alpha\to\gamma))) \to ((\beta\to\gamma)\to (\alpha\to\gamma))$ 10,11 MP

13) $(\beta\to\gamma) \to (\alpha\to\gamma)$ 9,12 MP

Podemos exibir melhor o esquema da dedução acima, empregando as regras de abreviação R1.1 e R2.2:

1) $\alpha\rightarrow\beta$	hipótese
3) $(\beta\rightarrow\gamma) \rightarrow (\alpha\rightarrow\beta)$	1/R1.1
4) $((\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow ((\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)) \rightarrow (\alpha\rightarrow\gamma))$	Ax. 2
6) $(\beta\rightarrow\gamma) \rightarrow ((\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow ((\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)) \rightarrow (\alpha\rightarrow\gamma)))$	4/R1.1
9) $(\beta\rightarrow\gamma) \rightarrow ((\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)) \rightarrow (\alpha\rightarrow\gamma))$	3,6/ R2.2
10) $(\beta\rightarrow\gamma) \rightarrow (\alpha\rightarrow (\beta\rightarrow\gamma))$	Ax.1
13) $(\beta\rightarrow\gamma) \rightarrow (\alpha\rightarrow\gamma)$	10,9/R2.2

Exercício: Usando a heurística do TD e eliminando os passos desnecessários construa, a partir das deduções acima, uma prova do teorema 6.2)

Mostremos, agora, que : $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)$, $\beta \vdash_s (\alpha\rightarrow\gamma)$

1) $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)$
2) β
3) $\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$
4) $(\alpha\rightarrow\beta)$
5) $(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow ((\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))$
6) $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)$
7) $\alpha\rightarrow\gamma$

Podemos, em seguida provar: $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma) \vdash_s \beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)$

1) $\alpha\to(\beta\to\gamma)$ hipótese

2) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\beta\to (\alpha\to(\beta\to\gamma))$ Ax. 1

3) $\beta\to (\alpha\to(\beta\to\gamma))$ 1,2/MP

4) $\beta\to(\alpha\to\beta)$ Ax. 1

5) $(\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))$ Ax. 2

6) $((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))\to(\beta\to((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))))$ Ax.1

7) $(\beta\to ((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))))$ 5,6/MP

8) $(\beta\to(\alpha\to\beta))\to((\beta\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))) \to (\beta\to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))))$ Ax. 2

9) $((\beta\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))) \to (\beta\to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))))$ 4,8/MP

10) $\beta\to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))$ 7,9/MP

11) $(\beta\to (\alpha\to(\beta\to\gamma))) \to((\beta\to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))\to(\beta\to(\alpha\to\gamma)))$ Ax. 2

12) $((\beta\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))\to(\beta\to(\alpha\to\gamma))$ 3,11/MP

13) $\beta\to(\alpha\to\gamma)$ 10,12/MP

O esquema dessa dedução, usando R1.1 e R2.2 fica assim:

1) $\alpha\to(\beta\to\gamma)$ hipótese

3) $\beta\to (\alpha\to(\beta\to\gamma))$ R1.1

4) $\beta\to(\alpha\to\beta)$ Ax. 1

5) $(\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))$ Ax. 2

7) $(\beta\to ((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))))$ 5/R1.1

10) $\beta\to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))$ 4,7/R2.2

13) $\beta\to(\alpha\to\gamma)$ 3,10/R2.2

Usemos agora as regras R1.1 e R2.2 para exibir um esquema de prova de 6.3:

1) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\beta\to (\alpha\to(\beta\to\gamma)))$ Ax.1

2) $(\beta\to(\alpha\to\beta))$ Ax.1

4) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to (\beta\to(\alpha\to\beta))$ 2/R1.1

5) $(\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))$ Ax.2

7) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))$ 5/R1.1

8) $((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))\to(\beta\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))))$ Ax.1

10) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to$

$((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))\to(\beta\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))))$ 8/R1.1

13) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to ((\beta\to ((\alpha\to\beta) \to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))))$ 7,10/R2.2

14) $(\beta\to(\alpha\to\beta))\to((\beta\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))) \to (\beta\to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))))$ Ax. 2

15) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to$

$(\beta\to(\alpha\to\beta))\to((\beta\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))))\to(\beta\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))))$ 14/R1.1

16) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to$

$(((\beta\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))) \to (\beta\to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))))$ 4,15/R2.2

17) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to (\beta\to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))$ 13,16/R2.2

18) $(\beta\to (\alpha\to(\beta\to\gamma))) \to((\beta\to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))\to(\beta\to(\alpha\to\gamma)))$ Ax. 2

20) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to$

$(\beta\to (\alpha\to(\beta\to\gamma))) \to((\beta\to ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))\to(\beta\to(\alpha\to\gamma)))$ 18/R2.2

23) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to ((\beta\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)))\to(\beta\to(\alpha\to\gamma))$ 1,20/R2.2

26) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to (\beta\to (\alpha\to(\beta\to\gamma)))$ 20,23/R2.2

Exercícios: Prove dedutivamente:

6.4) $\vdash_s (\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))$

6.5) $\vdash_s (\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$

Sugestão:

Começe provando: $(\alpha\rightarrow\beta)\vdash_s(\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))$ e $(\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))\vdash_s(\alpha\rightarrow\beta)$

X. INDEPENDÊNCIA DOS POSTULADOS DE C

Consideremos o cálculo C dado pelo sistema dedutivo apresentado anteriormente.

Para i $\leq$n $\leq$ 11, podemos formular agora a seguinte questão: seja S^{-n} o subcálculo de C formado por $\{P_1, \ldots, P_{11}\}$-$\{P_n\}$. Então: será que, para algum n, P_n é um teorema de S^{-n} ? Se fosse o caso que, em S^{-n}, P é demonstrável, então, o esquema P_n seria redundante na formulação de C. Mostraremos que para i $\leq$n $\leq$ 11, esse não é o caso.

De modo geral, dizemos que um esquema de axiomas ε é independente num sistema S qualquer se $\nvdash_{s-\varepsilon}$ ε.

Para provar a independência de um esquema ε num sistema S, podemos utilizar uma estratégia do seguinte tipo: indicamos uma propriedade P tal que:

- todos os axiomas de S-ε têm P;
- P é conservada pelas regras de S-ε;
- e ε não tem a propriedade P.

Por que essa estratégia nos leva a conclusão desejada? Porque, se todos os axiomas de S-ε têm P e se as regras conservam P, então todos os teoremas de S-ε têm P. Ora, ε não tem P; portanto, ε não é teorema de S-ε. [Essa forma de argumentação é usada em muitos outros contextos. Por exemplo, é assim que provamos também que uma fórmula não tautológica não se prova em C, ou em qualquer dos seus subcálculos].

Um tipo de propriedade muito usada nas provas de independência que usam a estratégia acima descrita é a da <u>validade numa determinada matriz M.</u> Vamos entender, em seguida, o que é uma matriz M e o que significa ser válido em M

Uma matriz M é um termo <V, D, O>, onde:

-V é um conjunto de objetos, usualmente ditos "valores de verdade";

-D é um subconjunto próprio de V; os elementos de D são ditos "valores distinguidos" de M;

-O é um conjunto de operações de V, contendo uma operação para cada conectivo da linguagem.

Um exemplo de matriz é a clássica M_c={{V,F}, {V}, O_c), onde O_c é o conjunto das operações classicamente associadas aos conectivos do cálculo clássico e que são indicadas pelos gráficos abaixo:

$\neg_c$	
V	F
F	V

$\wedge_c$	V	F
V	V	F
F	F	F

$\vee_c$	V	F
V	V	V
F	V	F

$\rightarrow_c$	V	F
V	V	F
F	V	V

<u>Obs.</u>: "$\neg_c$", "$\wedge_c$", "$\vee_c$", "$\rightarrow_c$" são, aqui, nomes para os elementos de O_c, i.e., para as funções de verdade que, classicamente, associamos aos conectivos "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$".

Dada uma matriz M, uma M-valoração é uma função do conjunto das fórmulas no conjunto D, de M, que respeita as operações de M. Assim, uma M_c-valoração é o mesmo que uma valoração booleana.

Seja M = $\langle V, D, O \rangle$; dizemos que uma fórmula α é válida em M, ou M-válida, se, para toda M-valoração v, $v(\alpha) \in D$. Assim, as tautologias são fórmulas M_c-válidas.

Dizemos que uma matriz M é apropriada para um cálculo S se:

1) todos os axiomas de S forem válidos em M; e

2) todas as regras de S conservarem a validade em M, i.e., forem tais que, se suas premissas forem válidas em M, sua conclusão também será válida em M.

Do que foi agora exposto segue-se que: se M é apropriada para S, todos os teoremas de S são válidos em M. Logo, se uma fórmula α não é válida em M, então α não é um teorema de S.

Nosso objetivo neste momento é mostrar a independência dos postulados de C. Usaremos, então, a seguinte estratégia: seja C^{-n} o cálculo obtido suprimindo de C o postulado P_n. Para cada n $\in\{1,2\}\cup\{4,...,11\}$, apresentaremos uma matriz M^n apropriada para C^{-n} na qual P_n não é um esquema válido. Com isso, teremos mostrado que $\nvdash_{C-n} P_n$.

M_1 : $\langle\{V,X,Y,F\}, \{V,X,Y\}, \{\wedge^\circ,\vee^\circ,\to^\circ,\neg^\circ,\}\rangle$, onde:

$\wedge^\circ$	V	X	Y	F
V	V	V	V	F
X	V	V	V	F
Y	V	V	V	F
F	F	F	F	F

$\vee^\circ$	V	X	Y	F
V	V	V	V	V
X	V	V	V	V
Y	V	V	V	V
F	V	V	V	F

$\to^\circ$	V	X	Y	F
V	V	X	Y	F
X	V	X	F	F
Y	V	X	Y	F
F	V	V	V	V

$\neg^\circ$	
V	F
X	F
Y	V
F	V

O postulado $(\alpha\to(\beta\to\alpha))$ é falsificado quando $v(\alpha)$= Y e $v(\beta)$= X.

M_2 : $<\{V,Y,F\}, \{V\}, \{\wedge^*,\vee^*,\rightarrow^*,\neg^*,\}>$, onde:

$\wedge^*$	V	Y	F
V	V	F	F
Y	F	F	F
F	F	F	F

$\vee^*$	V	Y	F
V	V	V	V
Y	V	V	V
F	V	V	F

$\rightarrow^*$	V	Y	F
V	V	F	F
Y	V	F	V
F	V	V	V

$\neg^*$	
V	F
Y	V
F	V

O postulado $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)))$ é falsificado quando $v(\alpha) = Y$, $v(\beta) \neq Y$ e $v(\gamma) = Y$.

As matrizes M^n, para $4 \leq n \leq 11$, terão a forma $<\{V,F\}, \{V\}, F^n>$. O conjunto F^n será especificado, em cada caso, compreendendo uma operação unária e três binárias, escolhidas entre as abaixo:

unárias: $\neg_c$ (como em M_c), $\overline{\top}_1$ e $@_1$, onde:

$\overline{\top}_1$	
V	V
F	V

C_1	
V	F
F	F

binárias : $\wedge_c$, $\vee_c$, $\rightarrow_c$ (como em M_c), $\overline{\top}_2$, C_2, $P_{1°}$ e $P_{2°}$, onde:

$\overline{\top}_2$	V	F
V	V	V
F	V	V

C_2	V	F
V	F	F
F	F	F

$P_{1°}$	V	F
V	V	V
F	F	F

$P_{2°}$	V	F
V	V	F
F	V	F

Conectivos:	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	P_n	
em F_4	$\neg_c$	$P_{2°}$	$\vee_c$	$\rightarrow_c$	$((\alpha\wedge\beta)\rightarrow\alpha)$	$v(\alpha)=F$, $v(\beta)=V$
em F_5	$\neg_c$	$P_{1°}$	$\vee_c$	$\rightarrow_c$	$((\alpha\wedge\beta)\rightarrow\beta)$	$v(\alpha)=V$, $v(\beta)=F$
em F_6	$\neg_c$	C_2	$\vee_c$	$\rightarrow_c$	$(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow(\alpha\wedge\beta)))$	$v(\alpha)=V$, $v(\beta)=V$
em F_7	$\neg_c$	$\wedge_c$	$P_{2°}$	$\rightarrow_c$	$(\alpha\rightarrow(\alpha\vee\beta))$	$v(\alpha)=V$, $v(\beta)=F$
em F_8	$\neg_c$	$\wedge_c$	$P_{1°}$	$\rightarrow_c$	$(\beta\rightarrow(\alpha\vee\beta))$	$v(\alpha)=F$, $v(\beta)=V$
em F_9	$\neg_c$	$\wedge_c$	$\overline{T}_2$	$\rightarrow_c$	$((\alpha\rightarrow\gamma)\rightarrow((\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow((\alpha\vee\beta)\rightarrow\gamma)))$	$v(\alpha)=v(\beta)=v(\gamma)=F$
em F_{10}	C_1	$\wedge_c$	$\vee_c$	$\rightarrow_c$	$((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\beta\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\neg\alpha))$	$v(\alpha)=F$, $v(\beta)$ V ou F
em F_{11}	$\overline{T}_1$	$\wedge_c$	$\vee_c$	$\rightarrow_c$	$(\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha)$	$v(\alpha)=F$

Se quisermos provar que os postulados do cálculo intuicionista são independentes, bastará mostrar que P_{12} não se prova em $\{P1,....,P_{10}\}$. Para isso tome-se a matriz M^{10}, na qual $(\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))$ é falsificada para $v(\alpha)=V$, $v(\beta)=F$.

XI. CONSIDERAÇÕES SOBRE A LEGITIMIDADE E A COMPLETUDE DE UM CÁLCULO DEDUTIVO

A) CONCEITOS GERAIS

Seja L uma linguagem formal para a qual tenha sido dada uma definição semântica de modo que estejam definidas as noções de validade e de conseqüência - vamos aqui representar por $\models\alpha$ e por $\Gamma\models\alpha$, respectivamente, as expressões 'α é válida' e 'α é conseqüência de Γ'.

Suponhamos , ainda, que S é um sistema dedutivo para L e que tenhamos definido as noções de teorema de S e de conseqüência dedutiva em S - aqui indicadas por $\vdash_S \alpha$ e $\Gamma\vdash_S \alpha$, respectivamente.

Podemos, então, propor quatro questões relacionando essas noções:

I) Os teoremas de S são válidos nessa semântica, i. e., se $\vdash_S \alpha$ então $\models\alpha$? A resposta positiva a essa questão é chamada CORREÇÃO (ou LEGITIMIDADE) FRACA DE S com respeito a essa semântica.

II) A relação de dedutibilidade em S é uma garantia de conseqüência semântica, ou seja, se $\Gamma\vdash_S \alpha$ então $\Gamma\models\alpha$? A resposta positiva a essa questão é dita CORREÇÃO (ou LEGITIMIDADE) FORTE DE S com respeito a essa semântica.

III) As fórmulas válidas na semântica podem ser provadas como teoremas de S, i. e., se $\models \alpha$ então $\vdash_s \alpha$? A resposta positiva a essa questão é chamada a COMPLETUDE FRACA DE S com respeito a essa semântica.

IV) A relação de conseqüência semântica é uma garantia de dedutibilidade em S, i. e., se $\Gamma\models\alpha$ então $\Gamma\vdash_s \alpha$? A resposta positiva a essa questão é dita a COMPLETUDE FORTE DE S com respeito a essa semântica.

Observemos que se os conceitos semânticos assegurarem que uma fórmula é válida se e só se for conseqüência do ϕ, e se as noções dedutivas de S forem definidas de tal forma que uma fórmula é teorema se e só se for dedutível do ϕ, então I é um corolário de II e III é um corolário de IV.

Consideremos agora um sistema dedutivo S no qual uma dedução seja definida como uma seqüência de fórmulas $\alpha_{1,}, \ldots, \alpha_n$ onde, para $1 \leq i \leq n$, cada α_i ou satisfaz uma condição básica CB dada, ou α_i é a conclusão por meio de uma regra de S de certas premissas que a precedem nessa seqüência. Então, podemos definir o conceito de complexidade dedutiva de α_i como se segue:

para $1 \leq i \leq n$, a complexidade dedutiva de α_i (CxDed(α)) em $\alpha_{1,}, \ldots, \alpha_n$ é :

- a) 0, se α_i satisfaz a condição básica CB;
- b) $X_1+\ldots+X_k+1$, se α_i é a conclusão das premissas $\beta_{1,}\ldots,\beta_k$ por uma regra R , $\beta_{1,}\ldots,\beta_k$ precedem α_i em $\alpha_{1,}, \ldots, \alpha_{n,}$, para $1 \leq j \leq k$, CxDed(Bj)=X_j e não existem $\beta'_1,\ldots,\beta'_m$ que precedam α_i em $\alpha_{1,}, \ldots, \alpha_n$ tais que se, para $1 \leq j' \leq m$, $y_{j'}$ = CxDed($\beta'_{j'}$), então $y_1 +\ldots+ y_m < X_1 +\ldots+ X_k$.

Observemos que, nos casos usuais , a condição básica é :

- ser um axioma de S, se a dedução é uma prova;

- ser um axioma de S ou pertencer a Γ, se a dedução é uma dedução de uma fórmula a partir de um conjunto de hipóteses Γ.

Uma vez definida a complexidade dedutiva dos elementos das deduções podemos usar dois tipos de argumentos por indução nela baseados:

a) Indução em teoremas: consiste em provar que :

Base: todos os axiomas de S têm uma propriedade dada;

Passo Indutivo: para qualquer regra R de S, se α é a conclusão por R das premissas $\beta_1,\ldots,\beta_k$, então , se $\beta_1,\ldots,\beta_k$ tiverem a propriedade, α terá também a propriedade.

Da prova dessas duas afirmações, seguir-se-á que todos os teoremas de S têm a propriedade.

b) Indução em deduções: Difere da indução em teoremas apenas pelo caso base, onde temos que provar que todos os axiomas de S e todos os elementos de Γ têm a propriedade em causa - no caso de estarmos tratando de uma dedução de uma fórmula a partir de um conjunto Γ. O esquema para o passo indutivo é análogo ao da indução em teoremas.

Da prova das duas afirmações seguir-se-á que, para toda fórmula α, todo conjunto Γ tal que $\Gamma \vdash_s \alpha$, vale a propriedade.

XII. A LEGITIMIDADE DE C

Do que foi exposto na seção anterior, segue-se que as provas de legitimidade fraca e forte do cálculo C com respeito à semântica das valorações booleanas estarão dadas se tivermos demonstrado as seguintes afirmações:

1) Se α é um axioma de C, então α é uma tautologia;

2) Se $\alpha \in \Gamma$, então α é conseqüência tautológica de Γ;

3) Se α é um axioma de C, então, para todo Γ, α é conseqüência tautológica de Γ

4) Se β e $(\beta \rightarrow \alpha)$ são tautologias, então α é uma tautologia.

Pois, usando 1) como base e 4) como passo indutivo, provamos a legitimidade por indução em teoremas; e usando 2) e 3) como base e 4) como passo indutivo, provamos a legitimidade forte por indução em deduções.

Deixamos, como exercício, as provas de 1)-4), bem como a construção das induções que explicam as provas de legitimidade fraca e forte de C.

<u>Observação:</u> os esquemas de indução em teoremas e indução em deduções podem ser usados em muitos outros casos!!

XIII. COMPLETUDE (FRACA) DO CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSSICO

Mostraremos, agora, que C é um cálculo completo com respeito à semântica booleana, ou seja : que, para toda fórmula α, se α é uma tautologia, então $\vdash_s \alpha$.

Para tanto, é necessário, inicialmente, demostrar um lema:

<u>LEMA DE KALMAR</u>: Seja T ($A_1,\dots, A_n$) uma tabela adequada para um conjunto Γ de fórmulas. Então, para toda subfórmula CS α de uma fórmula de Γ temos que , para $1 \leq j \leq 2^n$, $L^j \vdash_c [\alpha]^j$.

<u>PROVA:</u> por indução em Cx(α), onde Cx(α) é complexidade molecular de α.

<u>Base:</u> Cx(α)=0. Nesse caso, α é a única subfórmula CS de α e $[\alpha]^j$ é um letral; portanto $[\alpha]^j \in L^j$ e, trivialmente, $L^j \vdash_c [\alpha]^j$.

<u>Passo indutivo</u>: temos que provar a seguinte sentença condicional:

se , para toda α', que é uma subfórmula CS de uma fórmula de Γ tal que Cx(α')< Cx(α), temos que, para $1 \leq j \leq 2^n$, $L^j \vdash_c [\alpha']^j$, então para toda subfórmula CS α de uma fórmula de Γ, temos que , para $1 \leq j \leq 2^n$, $L^j \vdash_c [\alpha]^j$ - onde Cx (α)>0.

Suponhamos verdadeira a hipótese da indução (H.I.) e que α é uma subfórmula CS de uma fórmula de Γtal que Cx(α)>0. Temos os seguintes casos a examinar: a)$\alpha=\neg\beta$; b) $\alpha=(\beta_1 \wedge \beta_2)$; c) $\alpha=(\beta_1 \vee \beta_2)$; d) $\alpha=(\beta_1 \rightarrow \beta_2)$. (Obs.: como '$\leftrightarrow$' é tratado como símbolo abreviativo, não consideramos o caso em que $\alpha=(\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)$).Examinemos os quatro casos enunciados.

a) $\alpha=\neg\beta$. Como β é uma subfórmula CS de α e α é uma subfórmula CS de algum elemento de Γ, temos que β é uma subfórmula CS de algum elemento de Γ; assim, vale para β a H.I.: para $1 \leq j \leq 2^n$, $L^j \vdash [\beta^j]$.

Temos dois subcasos a considerar:

1) $v_j(\alpha)=V$; nesse caso, $v_j(\beta)=F$ e, assim, $[\alpha]^j = \alpha$, $[\beta]^j = \neg\beta$, ou seja, $[\beta]^j = [\alpha]^j$; logo $L^j \vdash_c [\alpha]^j$;

2) $v_j(\alpha)=F$; nesse caso , $v_j(\beta)=V$ e, assim, $[\alpha]^j=\neg\alpha$, $[\beta]^j=\beta$ e, como $\neg\alpha=\neg\neg\beta$, $[\alpha]^j=\neg\neg[\beta]^j$. Mas , como vimos, para qualquer γ, $\gamma \vdash_c \neg\neg\gamma$(6.1). Assim, $[\beta]^j \vdash_c \neg\neg[\beta]^j$; como $L^j \vdash_c [\beta]^j$, temos que $L^j \vdash_c \neg\neg[\beta]^j$, ou seja, $L^j \vdash_c [\alpha]^j$.

b) $\alpha=(\beta_1 \wedge \beta_2)$; como β_1 e β_2 são subfórmulas CS de α e α é subfórmula CS de alguma fórmula de Γ, β_1 e β_2 são subfórmulas CS de alguma fórmula de Γ. Assim, pela H.I., para $1 \leq j \leq 2^n$, $L^j \vdash_c [\beta_1]^j$ e $L^j \vdash_c [\beta_2]^j$. Temos dois casos a considerar:

1) $v_j(\alpha)=V$; nesse caso $v_j(\beta_1)=V$, $v_j(\beta_2)=V$ e $[\alpha]^j=\alpha$, $[\beta_1]^j=\beta_1$ e $[\beta_2]^j=\beta_2$; como , por 6.2, $\{\beta_1, \beta_2\} \vdash_c (\beta_1 \wedge \beta_2)$, $\{[\beta_1]^j, [\beta_2]^j\} \vdash_c [\alpha]^j$; portanto, $L^j \vdash_c [\alpha]^j$;

2) $v_j(\alpha)=F$; nesse caso $v_j(\beta_1)=F$ ou $v_j(\beta_2)=F$ e $[\alpha]^j=\neg\alpha$. Se $v_j(\beta_1)=F$, $[\beta_1]^j=\neg\beta_1$ e se $v_j(\beta_2)=F$, $[\beta_2]^j=\neg\beta_2$. Mas temos que, $\neg\beta_2 \vdash_c \neg(\beta_1 \wedge \beta_2)$ (6.3)e $\neg\beta_2 \vdash_c \neg(\beta_1 \wedge \beta_2)$ (6.4); assim, nos dois casos $L^j \vdash_c \neg(\beta_1 \wedge \beta_2)$; ou seja, $L^j \vdash_c [\alpha]^j$.

c) $\alpha=(\beta_1 \vee \beta_2)$; o argumento é análogo ao em b), usando, no caso de $v_j(\alpha)=V$, as propriedades 6.5 e 6.6 e, no caso $v_j(\alpha)=F$, a propriedade 6.7.

d) $\alpha=(\beta_1 \rightarrow \beta_2)$; o argumento é análogo ao dado em b), usando, no caso de $v_j(\alpha)=V$, as propriedades 6.8 e 6.9 e, no caso $v_j(\alpha)=F$, a propriedade 6.10.

Definiremos , agora, para cada seqüência de letras sentenciais $A_1,\ldots,A_n$ uma seqüência de conjuntos $\perp^0$, $\perp^1,\ldots,\perp^n$, por indução em i ($i \leq n$) como se segue:

<u>Base:</u> $\perp^0 = \{\varphi\}$; assim $\perp^0$ tem exatamente 2^0 elementos.

<u>Passo indutivo:</u> Suponhamos definido $\perp^i$, com 2^i elementos; então: $\perp^i = \{\theta_1, \theta_2,\ldots,\theta_{2^i}\}$. Construímos $\perp^{i+1}$ tal que $\theta' \in \perp^{i+1}$ se e somente se existe k, $i \leq k \leq 2^i$ tal que $\theta' = \theta_k \cup \{A_{i+1}\}$ ou $\theta' = \theta_k \cup \{\neg A_{i+1}\}$. Assim, $\perp^{i+1}$ terá 2^{i+1} elementos (i. e., 2.2^i elementos).

De acordo com essa definição, teremos:

$\perp^0 = \{\varphi\}$;

$\perp^1 = \{\{A_1\}, \{\neg A_1\}\}$;

$\perp^2 = \{\{A_1, A_2\}, \{A_1, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{\neg A_1, \neg A_2\}\}$;

$\perp^3 = \{\{A_1, A_2, A_3\}, \{A_1, A_2, \neg A_3\}, \{A_1, \neg A_2, A_3\},\ldots, \{\neg A_1, \neg A_2, \neg A_3\}\}$

etc...

Dessa forma, o conjunto $\perp^n$ é exatamente o conjunto dos conjuntos de letrais das linhas de $T(A_1,\ldots, A_n)$.

Para cada $i \leq n$ diremos que dois elementos θ^* e θ^{**} são i+1 conjugados se θ^* e θ^{**} forem elementos de $\perp^{i+1}$ tais que, para algum $\theta \in \perp^i$, $\theta^* = \theta \cup \{A_{i+1}\}$ e $\theta^{**} = \theta \cup \{\neg A_{i+1}\}$.

<u>LEMA:</u> Se, para qualquer $\theta^* \in \perp^{i+1}$, $\theta^* \vdash_c \alpha$, então para qualquer $\theta \in \perp^i$, $\theta \vdash_c \alpha$.

Prova: Suponhamos a hipótese e lembremos que os 2^{i+1} elementos de $\perp^{i+1}$ formam 2^i pares de conjuntos θ^*, θ^{**} i+1 conjugados. Sejam θ^*, θ^{**} um par desse tipo e θ o elemento de $\perp^i$ tal que $\theta^*=\theta \cup \{A_i\}$ e $\theta^{**}= \theta \cup \{\neg A_i\}$. Se $\theta^* \vdash_c \alpha$ e $\theta^{**} \vdash_c \alpha$. Pela propriedade 7, $\theta \vdash c\ \alpha$. Como isso vale para qualquer desses pares, segue-se que para todo $\theta \in \perp^i$, $\theta \vdash_c \alpha$.

<u>COROLÁRIO:</u> Se, para algum n, ocorre que para todo $\theta \in \perp^n$, $\theta \vdash_c \alpha$, então $\vdash_c \alpha$.

Prova: por indução em n.

<u>Base:</u> se n=0 e para todo $\theta \in \perp^0$, $\theta \vdash_c \alpha$, como φ é o único elemento de $\perp^0$, $\varphi \vdash_c \alpha$; logo $\vdash_c \alpha$;

<u>Passo indutivo:</u> n>0. Suponhamos a H.I.: que, se para todo $\theta' \in \perp^{n-1}$, $\theta' \vdash_c \alpha$ então $\vdash_c \alpha$,; e suponhamos que, para todo $\theta \in \perp^n$, $\theta \vdash_c \alpha$. Pelo lema anterior, temos que para todo $\theta' \in \perp^{n-1}$, $\theta' \vdash_c \alpha$; assim, pela H.I., $\vdash_c \alpha$.

<u>TEOREMA DA COMPLETUDE FRACA:</u> Se α é uma tautologia, então $\vdash_c \alpha$.

Prova: Se α é uma tautologia, em qualquer tabela $T(A_1,\ldots, A_n)$ adequada para α temos que, para $1 \leq j \leq 2^n$, $v_j(\alpha)=$ V. Logo, para $1 \leq j \leq 2^n$, $[\alpha]^j= \alpha$. Assim, pelo lema de Kalmar, para $1 \leq j \leq 2^n$, $L^j \vdash \alpha$. Mas $\{ L^1, L^2,\ldots, L^j,\ldots, L_2{}^n\}= \perp^n$; assim, para todo $\theta \in \perp^n$, $\theta \vdash_c \alpha$; logo, pelo corolário anterior, $\vdash_c \alpha$.

XIV. COMPLETUDE FORTE DO CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSSICO.

A. UMA ENUMERAÇÃO PARA AS FÓRMULAS DE C

Existem várias maneiras de fazer uma enumeração completa de todas as fórmulas do cálculo proposicional. Uma delas é a seguinte: defina-se uma função g, dos símbolos da linguagem nos números positivos, como se segue:

$g(\neg)=1$, $g(\wedge)=3$, $g(\vee)=5$, $g(\rightarrow)=7$, $g(\leftrightarrow)=9$, $g(\,(\,)=11$, $g(\,)\,)=13$; sejam A_1, A_2, ..., A_n,... as letras sentenciais dadas em ordem alfabética; então $g(A_n)=13+2n$.

Assim, todo número ímpar é a imagem por g de um símbolo da linguagem proposicional.

Seja, agora, $\sigma_1\ \sigma_2...\sigma_n$ uma seqüência de símbolos da linguagem, p_1, p_2, ..., p_n os n primeiros números primos. Definimos então $g^*(\sigma_1\ \sigma_2...\sigma_n)$ como: $p_1^{g(\sigma 1)} \times p_2^{g(\sigma 2)} \times ... \times p_n^{g(\sigma n)}$. Assim, cada expressão formada pelos símbolos da linguagem fica associada a um número natural par (esse número é par pois $g(\sigma_1) \geq 1$ para todo σ_1 e $p_1=2$; assim, cada número desse tipo é múltiplo de uma potência positiva de 2. Por outro lado, como qualquer número natural tem uma única decomposição em fatores primos, todo número natural que é da forma $p_1^{g1} \times p_2^{g2} \times ... \times p_n^{g\ n}$ onde, para $1 \leq i \leq n$, $g_i \geq 1$, é a imagem por g^* de uma expressão formada com os símbolos da linguagem. Ora, entre as expressões desse tipo estão as fórmulas da linguagem. Assim, podemos definir uma enumeração de todas as fórmulas da linguagem, ε, tal que, para quaisquer fórmulas α, β, α precede β em ε se e somente se $g^*(\alpha) < g^*(\beta)$.

No que se segue, usaremos essa enumeração ε para a linguagem proposicional. No entanto, existem muitas outras formas de definir uma enumeração para uma linguagem.

B) CONJUNTOS γ-SATURADOS

Para provar que, se α é conseqüência tautológica de Γ então $\Gamma \vdash_c \alpha$, precisamos definir ainda alguns conceitos e provar alguns lemas.

Dizemos que um conjunto Δ é γ-saturado, para alguma fórmula γ e em um sistema dedutivo S se $\Delta \nvdash_s \gamma$, mas para todo $\gamma' \notin \Delta$, $\Delta \cup \{\gamma'\} \vdash_s \gamma$.

(O conceito que acabamos de definir é, em alguns cálculos, e emparticular em C, coextensional com o conceito de conjunto maximal consistente e de conjunto não trivial maximal freqüentemente encontrados na literatura. No entanto, de um ponto de vista mais geral, trata-se de um conceito mais amplo, pois, ao contrario desses últimos, é aplicável a cálculos não finitamente trivializáveis.)

Ao estudar os conjuntos acima definidos, vale começar por uma propriedade de importância fundamental :

Propriedade fundamental de um conjunto Δ γ-saturado, em um sistema S:

$$\Delta \vdash_s \alpha \text{ se e só se } \alpha \in \Delta$$

Explicitando: quando se trata desses conjuntos, as relações de pertinência e de dedutibilidade são coextensivas!

Para que valha essa propriedade num sistema S, é suficiente que a noção de dedução seja definida de tal modo que a ela se apliquem as propriedades:

1) se $\alpha \in \Gamma$ então $\Gamma \vdash_s \alpha$ - o que é uma característica muito freqüente das definições de deduções em sistemas lógicos;

2) se $\Gamma \vdash_s \alpha$ e, para todo $\beta \in \Gamma$, $\Gamma' \vdash_s \beta$, então $\Gamma' \vdash_s \alpha$ - o que também é uma característica muito freqüente nos sistemas dedutivos.

Suponhamos, então, que S seja um sistema em que valham 1 e 2 acima. Mostremos que vale em S a propriedade fundamental. Para tanto, basta demonstrar que se $\Delta \vdash_s \alpha$ então $\alpha \in \Delta$ (ida), uma vez que a implicação inversa (volta) é exigida como condição 1.

Prova da ida :Suponhamos que $\Delta \vdash_s \alpha$. Como Δ é γ-saturado, se $\alpha \notin \Delta$ então $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash_s \gamma$; mas como $\Delta \vdash_s \alpha$, segue-se de 1) que, para todo $\beta \in \Delta \cup \{\alpha\}$, $\Delta \vdash_s \beta$; então, segue-se de 2) que se $\alpha \notin \Delta$, $\Delta \vdash_s \gamma$. Mas $\Delta \nvdash_s \gamma$, pois é γ-saturado. Assim, $\alpha \in \Delta$. Fica então provado que se $\Delta \vdash_s \alpha$ então $\alpha \in \Delta$.

Podemos agora passar a mostrar que um conhecido lema, apresentado na literatura como um método de obtenção de certos tipos de conjuntos maximais consistentes, pode ser adaptado para a obtenção de correspondentes conjuntos γ-saturados. Como se trata de uma variante do lema usualmente apresentado, guardamos o nome do autor a quem ele costuma ser atribuído; Vale ressaltar, no entanto, que embora seja uma variante da versão para os conjuntos maximais consistentes, a prova aqui apresentada tem o mérito de evidenciar o importante fato de que o lema não decorre de características ligadas aos significados que os conectivos da linguagem adquirem por força da maneira como ocorrem no conjuntos postulados dos sistemas envolvidos, nem da existência de determinados esquemas que podem ser provados - como, por exemplo, o esquema de Duns Scott, que reduz à trivialidade qualquer conjunto que contenha uma fórmula e sua negação - mas repousa exclusivamente sobre certas características das definições de dedução adotadas por tais sistemas. Passemos, então, ao lema.

<u>LEMA DE LINDENBAUM:</u> Se $\Gamma \not\vdash_s \gamma$, existe um conjunto Δ, tal que $\Gamma \subset \Delta$ e Δ é γ saturado.

<u>Prova:</u> Seja $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots$ uma enumeração das fórmulas da linguagem.

Vamos construir uma seqüência infinita de conjuntos, $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Gamma_{n+1}, \ldots$ como se segue:

$\Gamma_0 = \Gamma$

$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$, se $\Gamma_n \cup \{\alpha_{n+1}\} \vdash \gamma$

$\Gamma_n \cup \{\alpha_{n+1}\}$, se $\Gamma_n \cup \{\alpha_{n+1}\} \not\vdash \gamma$

As seguintes afirmaçõess são verificadas facilmente: (Exercícios!)

a) para todo n, $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$;

b) para todo n, $\Gamma_n \not\vdash_s \gamma$;

c) se n+1 é o índice de α na enumeração, então para todo $m \geq 1$, $\alpha \in \Gamma_{n+m}$ se e só se $\Gamma_n \cup \{\alpha\} \not\vdash_s \gamma$.

Tomemos agora $\Delta = \cup \Gamma_n$, para todo n.

Mostremos que Δ satisfaz as condições do lema.

- $\Gamma \subset \Delta$, pois $\Gamma_0 = \Gamma$ e , como $\Delta = \cup \Gamma_n$ para todo n, temos que $\Gamma_n \subset \Delta$ para todo n.

- $\Delta \not\vdash_s \gamma$. Suponhamos, por absurdo, que $\Delta \vdash_s \gamma$. Seja Γ^* o conjunto das hipóteses de Δ efetivamente usadas na dedução de γ a partir de Δ e seja n+1 o índice mais alto dos elementos de Γ^*; segue-se de c) que $\Gamma^* \subset \Gamma_{n+1}$; nesse caso, $\Gamma_{n+1} \vdash_s \gamma$, o que contraria b). Assim, $\Delta \not\vdash_s \gamma$.

- Finalmente, seja $\alpha \notin \Delta$ e seja n+1 o índice de α na enumeração; então $\alpha \notin \Gamma_{n+1}$; mas, nesse caso $\Gamma_n \cup \{\alpha\} \vdash_s \gamma$; assim $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash_s \gamma$.

Fica então provado o lema de Lindenbaum.

Agora ficou bem claro que, no decorrer da prova, nenhuma propriedade particular decorrente dos postulados do sistema foi usada Assim, essa prova pode ser estendida a qualquer sistema onde a definição de dedução tenha as características 1) e 2) mencionadas no início!

Exercício: Em que momentos da prova as afirmações 1) e 2) foram pressupostas?

Vejamos agora como são os Δ γ-saturados no cálculo clássico. Não é difícil demonstrar que, em C, valem as seguintes afirmações para qualquer Δ e γ tal que Δ é γ-saturado:

1) $\neg\alpha \in \Delta$ sse $\alpha \notin \Delta$

2) $(\alpha \wedge \beta) \in \Delta$ sse α, $\beta \in \Delta$

3) $(\alpha \vee \beta) \in \Delta$ sse $\alpha \in \Delta$ ou $\beta \in \Delta$

4) $(\alpha \rightarrow \beta) \in \Delta$ sse $\alpha \notin \Delta$ ou $\beta \in \Delta$

5) $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in \Delta$ sse α $\beta \in \Delta$ ou α, $\beta \notin \Delta$

<u>Provas:</u> Usando o lema fundamental, é suficiente mostrar que:

1') $\Delta \vdash \neg\alpha$ sse $\Delta \nvdash \alpha$

2') $\Delta \vdash (\alpha \wedge \beta)$ sse $\Delta \vdash \alpha$ e $\Delta \vdash \beta$

3') $\Delta \vdash (\alpha \vee \beta)$ sse $\Delta \vdash \alpha$ ou $\Delta \vdash \beta$

4') $\Delta \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ sse $\Delta \nvdash \alpha$ ou $\Delta \vdash \beta$

5') $\Delta \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$ sse $\Delta \vdash \alpha$ e $\Delta \vdash \beta$, ou $\Delta \nvdash \alpha$ e $\Delta \nvdash \beta$.

Indicaremos, abaixo, os caminhos para essas provas.

1') a) Como vale em C $\neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)$, se $\Delta\vdash_c \neg\alpha$ então $\Delta\vdash_c (\alpha\rightarrow\gamma)$; mas $\Delta \nvdash_c \gamma$; logo, se $\Delta\vdash_c \neg\alpha$, então $\Delta\nvdash_c \alpha$.

b) Se $\Delta\nvdash_c \neg\alpha$, então $\Delta\cup\{\neg\alpha\}\vdash_c \gamma$ e, pelo TD, $\Delta\vdash (\neg\alpha\rightarrow\gamma)$. Ora, em C valem $\neg\alpha\vee\alpha$ e $(\neg\alpha\rightarrow\gamma)\rightarrow((\alpha\rightarrow\gamma)\rightarrow((\neg\alpha\vee \alpha)\rightarrow\gamma))$ e, assim, vale $(\neg\alpha\rightarrow\gamma)\rightarrow((\alpha\rightarrow\gamma)\rightarrow\gamma))$; logo, se $\Delta\nvdash_c \neg\alpha$, $\Delta\vdash_c ((\alpha\rightarrow\gamma)\rightarrow\alpha)$; mas então, se $\Delta\nvdash_c \neg\alpha$, como vale a lei de Peirce, $(((\alpha\rightarrow\gamma)\rightarrow\alpha)\rightarrow\alpha)$, se $\Delta\nvdash_c \neg\alpha$, então $\Delta\vdash_c\alpha$

2') a) Se $\Delta\vdash_c (\alpha\wedge\beta)$, por R4.1 e R5.1, $\Delta\vdash_c \alpha$ e $\Delta\vdash_c \beta$;

b) Se $\Delta\vdash_c \alpha$ e $\Delta\vdash_c \beta$, por R6.2, $\Delta\vdash_c (\alpha\wedge\beta)$.

3') a) Se $\Delta\vdash_c (\alpha\vee \beta)$, por R9.3, $\Delta\cup\{(\alpha\rightarrow\gamma), (\beta\rightarrow\gamma)\}\vdash_c \gamma$, logo, se $\Delta\vdash_c (\alpha\vee \beta)$, ou $\Delta\nvdash_c(\alpha\rightarrow\gamma)$ ou $\Delta\nvdash_c (\beta\rightarrow\gamma)$; nesse caso, se $\Delta\vdash_c (\alpha\vee \beta)$, ou $\Delta\cup\{\alpha\}\nvdash_c \gamma$ ou $\Delta\cup\{\beta\}\nvdash_c\gamma$; assim, se $\vdash_c (\alpha\vee \beta)$, ou $\alpha\in\Delta$ ou $\beta\in\Delta$, uma vez que qualquer fórmula que não pertença a Δ, se unida a Δ possibilita a dedução de γ.

b) Se $\Delta\vdash_c \alpha$, por R7.1, $\Delta\vdash_c (\alpha\vee \beta)$ e se $\Delta\vdash_c \beta$, por R8.1, $\Delta\vdash_c (\alpha\vee \beta)$; assim, se $\Delta\vdash_c \alpha$ ou $\Delta\vdash_c \beta$ temos que $\Delta\vdash_c (\alpha\vee \beta)$.

4') a) Se $\Delta\vdash_c \alpha\rightarrow\beta$, temos dois casos : $\Delta\nvdash_c \alpha$ e, nesse caso, $\Delta\nvdash_c \alpha$ ou $\Delta\vdash_c \beta$; ou $\Delta\vdash_c \alpha$ e, por M.Ponens, $\Delta\vdash_c \beta$; logo, nesse caso também, $\Delta\nvdash_c \alpha$ ou $\Delta\vdash_c \beta$.

b) Se $\Delta\nvdash_c \alpha$, por 1'b), $\Delta\vdash_c \neg\alpha$; como $\Delta\vdash_c \neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$, $\Delta\vdash_c (\alpha\rightarrow\beta)$; se $\Delta\vdash_c \beta$, por R1.1, $\Delta\vdash_c \alpha\rightarrow\beta$; logo, se $\Delta\nvdash_c \alpha$ ou $\Delta\vdash_c \beta$, então $\Delta\vdash_c (\alpha\rightarrow\beta)$.

5') a) se $\Delta\vdash_c (\alpha\leftrightarrow\beta)$, então $\Delta\vdash_c ((\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha))$. Temos dois casos:

(I) $\Delta\vdash_c \alpha$; nesse caso, como $\Delta\vdash_c (\alpha\rightarrow\beta)$ então $\Delta\vdash_c \beta$; logo, $\Delta\vdash_c \alpha$ e $\Delta\vdash_c \beta$;

(II) $\Delta\nvdash_c \alpha$; nesse caso $\Delta\vdash_c \neg\alpha$, por 1'a); como $\Delta\vdash_c (\beta\rightarrow\alpha)$, temos que $\Delta\vdash_c \neg\beta$ e, por 1'a), $\Delta\nvdash_c \beta$; logo, nesse caso , $\Delta\nvdash_c \alpha$ e $\Delta\nvdash_c \beta$.

Mas, ou $\Delta\vdash_c \alpha$ ou $\Delta\nvdash_c \alpha$; assim, ou $\Delta\vdash_c \alpha$ e $\Delta\vdash_c \beta$, ou $\Delta\nvdash_c \alpha$ e $\Delta\nvdash_c \beta$.

b) Se $\Delta\vdash_c \alpha$ e $\Delta\vdash_c \beta$ então, por R1.1 e R6.1, $\Delta\vdash_c (\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)$; se $\Delta\nvdash_c \alpha$ e $\Delta\nvdash_c \beta$ então, por 1'a), $\Delta\vdash_c \neg\alpha$ e $\Delta\vdash_c \neg\beta$, logo, por Duns Scott, $\Delta\vdash_c \alpha\rightarrow\beta$ e $\Delta\vdash_c \beta\rightarrow\alpha$, logo, por R6.1, $\Delta\vdash_c (\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)$, ou seja, $\Delta\vdash_c (\alpha\leftrightarrow\beta)$.

Ficam então provadas as propriedade 1)-5) em C.

Passemos ao último lema necessário para a prova da completude forte de C.

<u>LEMA:</u> A função característica de um conjunto Δ γ-saturado é uma valoração booleana que falsifica γ.

<u>Prova:</u> Seja f a função característica de um conjunto Δ γ-saturado, ou seja, f é uma função do conjunto das fórmulas no conjunto {V,F} tal que f(α)=V se e só se $\alpha\in\Delta$.

Segue-se das propriedades 1)-5), acima, que f é uma valoração booleana. Como $\gamma\notin\Delta$, temos que f(γ)=F.

<u>COROLÁRIO</u>: Se Δ é γ-saturado e $\Gamma\subset\Delta$ então não é o caso que $\Gamma \models \gamma$.

<u>Prova:</u> a função característica de Δ é um modelo funcional-veritativo de Γ que falsifica γ.

Podemos, agora enunciar e demonstrar a completude forte de C:

TEOREMA DA COMPLETUDE FORTE DE C: Se $\Gamma \models \alpha$, então $\Gamma \vdash_c \alpha$.

Prova: Suponhamos que $\Gamma \nvdash_c \alpha$; então existe Δ α-saturado tal que $\Gamma \subset \Delta$; pelo corolário do lema anterior, não é o caso que $\Gamma \models \alpha$. Portanto, se $\Gamma \models \alpha$ então $\Gamma \vdash_c \alpha$.

Demonstrados os teoremas da legitimidade e da completude, fica evidenciado que a lógica sentencial definida pela via semântica com auxílio do conceito de valoração booleana é a mesma lógica determinada pelo conjunto de postulados de C.

XV. MAXIMALIDADE DO CÁLCULO SENTENCIAL CLÁSSICO.

Mostraremos, agora, que numa linguagem que contenha $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ como únicos conectivos primitivos (e '$\leftrightarrow$', ou quaisquer outros, como símbolos definidos) o sistema formado pelos postulados P1 - P_{11} (i. e. o sistema C) é um sistema MAXIMAL, i.e., que não existe nenhum sistema estrutural S tal que :

1) Todo teorema de C é teorema de S;

2) Há um teorema de S que não é teorema de C;

3) Nem toda fórmula é teorema de S (i.e., S é não-trivial).

Para tanto, precisamos definir alguns conceitos e enunciar alguns lemas.

Inicialmente, sejam $A_1,\ldots, A_n$ as letras sentenciais de α. Denotaremos por $\alpha^{A1,\ldots,An}/_{\beta1,\ldots,\beta n}$ o resultado da substituição de cada ocorrência da letra A_i por uma ocorrência da fórmula β_i, para $1\leq i \leq n$.

Dizemos que um cálculo é estrutural se : a) para qualquer axioma α cujas letras sentenciais são $A_1,\ldots, A_n$, temos que, para quaisquer fórmulas $\beta_1,\ldots, \beta_n$, $\alpha^{A1,\ldots,An}/_{\beta1,\ldots,\beta n}$ é um axioma; b) para qualquer fórmula α_{k+1} que é a conclusão por uma regra de $\alpha_1,\ldots, \alpha_k$ temos que $\alpha_{k+1}{}^{A1,\ldots,An}/_{\beta1,\ldots,\beta n}$ é a conclusão por essa regra de $\alpha_1{}^{A1,\ldots,An}/_{\beta1,\ldots,\beta n},\ldots, \alpha_{k+1}{}^{A1,\ldots,An}/_{\beta1,\ldots,\beta n}$, onde $\{A_1,\ldots,A_n\}$ contém todas as letras sentenciais de $\alpha_1,\ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$.

Os cálculos introduzidos por meio de postulados são, assim, cálculos estruturais. É claro que, num cálculo estrutural, se $\alpha_1,\ldots, \alpha_k$ é uma prova de α_k, então $\alpha_1{}^{A1,\ldots,An}/_{\beta1,\ldots,\beta n},\ldots, \alpha_k{}^{A1,\ldots,An}/_{\beta1,\ldots,\beta n}$ é uma prova de $\alpha_k{}^{A1,\ldots,An}/_{\beta1,\ldots,\beta n}$. Assim, se $\vdash \alpha$ então $\vdash \alpha^{A1,\ldots,An}/_{\beta1,\ldots,\beta n}$.

Seja, agora, v uma valoração booleana, α uma fórmula, $A_1,\ldots, A_n$ as letras sentenciais; indicaremos por α^v a fórmula $\alpha^{A1,\ldots,An}/_{\beta1,\ldots,\beta n}$ onde: $\beta_i = (A_i \vee\neg A_i)$ se $v(A_i)=V$ e $\beta_i= (A_i \wedge\neg A_i)$ se $v(A_i)=F$.

<u>LEMA:</u> Seja v uma valoração booleana, α uma fórmula. Então, para toda valoração booleana v', $v'(\alpha^v)= v(\alpha)$

<u>Prova:</u> por indução na complexidade de α (Exercício!)

<u>COROLÁRIO:</u> para toda fórmula α, toda valoração v, α^v é uma tautologia ou $\neg\alpha^v$ é uma tautologia.

Exemplos: Seja $\alpha = ((P\wedge\neg Q)\rightarrow(P\leftrightarrow R))$ e seja v(P)=V, v(Q)= v(R)=F. Então $\alpha^v=((P\vee\neg P)\wedge\neg(Q\wedge\neg Q))\leftrightarrow(R\wedge\neg R)))$. Verificamos facilmente que $v((P\wedge\neg Q)\rightarrow(P\leftrightarrow R))=F$ e que $\neg\alpha^v$ é uma tautologia.

Podemos, agora, provar a maximalidade de C. Seja, então S um sistema estrutural satisfazendo a condição de que todo teorema de C é teorema de S; suponhamos, ainda, que há um teorema α de S que não é teorema de C. Então, α não é uma tautologia e, dessa forma, existe v tal que $v(\alpha)=F$; assim, $\neg\alpha^v$ é uma tautologia e, como toda tautologia é teorema de C e todo teorema de C é teorema de S, $\neg\alpha^v$ é teorema de S. Mas, como α^v é da forma $\alpha^{A1,\ldots,An}/_{\beta1,\ldots,\beta n}$ e α é teorema de S, temos que α^v é teorema de S. Assim,

$$\vdash_s \alpha^v \qquad \text{e} \vdash_s \neg\alpha^v$$

Mas, temos que $\{\alpha^v, \neg\alpha^v\} \vdash_s \gamma$, pois tudo que vale em C vale em S; assim, segue-se que $\vdash_s \gamma$, ou seja, qualquer fórmula se demonstra em S como teorema.

Fica então provado que C é maximal em sua linguagem, com respeito aos sistemas estruturais. Ou seja, se acrescentarmos a C um novo esquema como postulado, o sistema resultante será o próprio C se o novo postulado for tautológico; ou será trivial, se o postulado não for tautológico.

Lucas Soares → lucas.barbosa.soares@usp.br

RODRIGO CAVALLARO → NÃO MUDAR

Marcelo Hideki Yamane

Rosângela de S. Machado

Ana Caroline A. Hitomi → não mudar

Victor Hugo coelho.vhugo@gmail.com

MARIA SETTE WHITAKER COSTA MSETTEWHITAKER@GMAIL.COM

Bruno Mancini brunocmancini@gmail.com

marco Rodrigues marco.rodrigues@usp.br

Thiago Pezzuol Miguel thiago.pezzuol@usp.br

Braian braian.matilde@usp.br

César Eduardo Vieira cesar.vieira@usp.br